Uniwersytet Pedagogiczny
im. Komisji Edukacji Narodowej
w Krakowie
Instytut Matematyki

Program nauczania

dla 2-letnich studiów stacjonarnych i niestacjonarnych drugiego stopnia

kierunek: matematyka

specjalność: matematyka stosowana

Kraków 2008

Skład i łamanie w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie

Spis treści

Przedmioty podstawowe z matematyki

1. Analiza matematyczna 1

Treści nauczania

1. Teoria miary. Ciała, σ-ciała, miara, zbiory borelowskie. Miara zewnętrzna. Twierdzenie Caratheodory'ego. Produktowanie miar. Miara Lebesgue'a w $\mathbb{R}$ i w $\mathbb{R}^k$. Własności miary Lebesgue'a. Funkcje mierzalne i ich zbieżność. Informacje o mierze Jordana.

2. Całka względem miary. Całka z funkcji prostej, całka z funkcji mierzalnej i nieujemnej. Całka Lebesque'a. Twierdzenie Fubiniego; twierdzenie o podstawianiu (dowód dla jednej zmiennej). Twierdzenia o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki. Całka Riemanna, a całka Lebesgue'a.

Literatura podstawowa

1. A. Birkholc, *Analiza matematyczna. Funkcje wielu zmiennych*, PWN, Warszawa 2002.
2. J. Dieudonne, *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York and London, 1969.
3. W. Kołodziej, *Analiza matematyczna*, PWN, Warszawa 1978.
4. Musielak, M. Jaroszewska, *Analiza matematyczna t. II cz.2, 3*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2002.
5. W. Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, PWN, Warszawa 2002.
6. R. Rudnicki, *Wykłady z analizy matematycznej*, PWN, Warszawa 2006.
7. R. Sikorski, *Rachunek różniczkowy i całkowy (funkcji wielu zmiennych)*, PWN, Warszawa 1967.
8. M. Spivak, *Analiza na rozmaitościach*, PWN, Warszawa 2006.

Literatura uzupełniająca

1. S. Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funcji rzeczywistych*, PWN, Warszawa 1976.
2. K. Maurin, *Analiza, cz. I,II*, PWN, Warszawa 1991.
3. L. Schwartz, *Kurs analizy matematycznej, t.I,II*, PWN, Warszawa 1979.

2. Analiza matematyczna 2

Treści nauczania

Elementy analizy matematycznej na rozmaitościach. Powierzchnie gładkie w przestrzeni euklidesowej. Przestrzeń styczna. Formy różniczkowe. Całkowanie form różniczkowych. Twierdzenie Stokesa i jego szczególne przypadki. Potencjał, pole potencjalne. Warunki konieczne i dostateczne potencjalności pola.

Literatura podstawowa

1. G. N. Berman, *Zbiór zadań z analizy matematycznej*, Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice 1999.
2. A. Birkholc, *Analiza matematyczna, funkcje wielu zmiennych*, WN PWN, Warszawa 2002.
3. J. Dieudonne, *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York and London, 1969.
4. W. Kołodziej, *Analiza matematyczna*, PWN, Warszawa 1978.
5. J. Musielak, L. Skrzypczak, *Analiza matematyczna t. III cz.1*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2006.
6. W. Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, PWN, Warszawa 2002.
7. R. Rudnicki, *Wykłady z analizy matematycznej*, WN PWN, Warszawa 2006.
8. R. Sikorski, *Rachunek różniczkowy i całkowy (funkcji wielu zmiennych)*, wyd. 5., PWN, Warszawa 1967.
9. M. Spivak, *Analiza na rozmaitościach*, wyd. 2., PWN, Warszawa 2006.

Literatura uzupełniająca

1. K. Maurin, *Analiza, cz. I,II*, PWN, Warszawa 1991.
2. L. Schwartz, *Kurs analizy matematycznej, t.I,II*, PWN, Warszawa 1979.

3. Analiza zespolona

Treści nauczania

1. Szeregi potęgowe. Lemat Abela. Twierdzenie Cauchy'ego-Hadamarda. Funkcje holomorficzne. Pierścień funkcji holomorficznych. Funkcje całkowite, holomorficzność sumy szeregu potęgowego.

2. Pochodna zespolona. Równania Cauchy'ego Riemanna. Funkcje analityczne. Twierdzenie Weierstrassa o analityczności szeregu potęgowego.

3. Całka krzywoliniowa zorientowana i niezorientowana. Twierdzenie całkowe Cauchy'ego, wzór całkowy Cauchy'ego (dla koła). Holomorficzność funkcji analitycznej, istnienie pochodnych wszystkich rzędów. Nierówność Cauchy'ego. Twierdzenie Liouville'a. Podstawowe twierdzenie algebry.

4. Zera funkcji holomorficznej. Zasada identyczności dla funkcji holomorficznych, zasada maksimum. Twierdzenie Morery.

5. Szereg Laurenta. Punkt regularny, izolowany punkt osobliwy. Punkt pozornie osobliwy, biegun, punkt istotnie osobliwy, przykłady. Charakteryzacja punktów pozornie osobliwych. Twierdzenie Riemanna o osobliwości. Charakteryzacja biegunów. Twierdzenie Casoratiego-Weierstrassa-Sochockiego.

6. Indeks punktu. Residuum, twierdzenie o residuach, zastosowanie twierdzenia o residuach dla niewłaściwej całki rzeczywistej.

Literatura podstawowa

1. J. Bak, D. J. Newmann, *Complex analysis*, UTM, Springer, 1996.
2. J. Chądzyński, *Wstęp do analizy zespolonej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2000.

LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

1. E. Hille, *Analytic function theory*, AMS Bookstore, 1973.
2. J. Krzyż, *Zbiór zadań z funkcji analitycznych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
3. F. Leja, *Funkcje zespolone*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.
4. W. Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998.
5. S. Saks, A. Zygmund, *Funkcje analityczne*, Monografie Matematyczne, Vol.28, Warszawa-Wrocław, 1952. (w postaci plików pdf:http:matwbn.icm.edu.pl/ksspis.php?wyd=10).
6. B. W. Szabat, *Wstęp do analizy zespolonej*, PWN, Warszawa 1974.
7. W. Więsław, *Liczby i geometria*, WSiP, Warszawa 1996.

4. Analiza funkcjonalna

TREŚCI NAUCZANIA

1. *Przestrzenie unormowane i Banacha*: własności normy, zupełność, uzupełnianie przestrzeni unormowanych, przykłady przestrzeni unormowanych ciągowych i funkcyjnych, skończenie wymiarowe przestrzenie unormowane, zwartość (w przypadku skończenie i nieskończenie wymiarowym), szeregi w przestrzeniach unormowanych.

2. *Przestrzenie unitarne i Hilberta*: nierówność Schwarza, związki iloczynu skalarnego z normą, uzupełnianie przestrzeni unitarnych, ortogonalność, dopełnienie ortogonalne (twierdzenie o rzucie ortogonalnym), układy ortonormalne (ortogonalizacja i ortonormalizacja układu wektorów), układy ortonormalne zupełne, szeregi Fouriera (nierówność Bessela, tożsamość Parsevala, układ trygonometryczny, szereg Fouriera względem układu trygonometrycznego), twierdzenie Riesza-Fishera.

3. *Operatory liniowe ciągłe*: ograniczoność i ciągłość, norma operatora, przestrzeń dualna, twierdzenie Riesza o postaci funkcjonałów liniowych w przestrzeni Hilberta, twierdzenie Banacha o operatorze otwartym, twierdzenie o operatorze odwrotnym, twierdzenie o domkniętym wykresie, twierdzenie Banacha-Steinhausa, twierdzenie Hahna-Banacha, operatory sprzężone.

4. *Informacje uzupełniające*: elementy teorii aproksymacji, analizy spektralnej, zastosowania analizy funkcjonalnej.

LITERATURA PODSTAWOWA

1. J. Chmieliński, *Analiza funkcjonalna. Notatki do wykładu*, wyd. 2., Wydawnictwo Naukowe AP, Kraków 2004.
2. W. Kołodziej, *Wybrane rozdziały analizy matematycznej*, wyd. 2., Biblioteka Matematyczna t.36, PWN, Warszawa 1982.
3. J. Musielak, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*, PWN, Warszawa 1989.

LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

1. Alexiewicz, *Analiza funkcjonalna*, Monografie Matematyczne, t. 40, PWN, Warszawa 1969.
2. J.R. Giles, *Introduction to the Analysis of Normed linear Spaces*, Cambridge University Press, Cambridge 2000.
3. W. Mlak, *Wstęp do teorii przestrzeni Hilberta*, wyd. 4., Biblioteka Matematyczna t. 35, PWN, Warszawa 1987.
4. W. Pleśniak, *Wykłady z teorii aproksymacji*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 2000.
5. W. Rudin, *Analiza funkcjonalna*, PWN, Warszawa 2001.
6. K. Yosida, *Functional Analysis*, 6th. ed., Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1980.
7. J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, 2nd. ed., Springer, New York 1990.

5. Topologia

Treści nauczania

Pojęcie przestrzeni topologicznej, przykłady (w szczególności przestrzeń metryczna). Różne rodzaje zbiorów (otwarte, domknięte, brzegowe, gęste, nigdziegęste, pierwszej kategorii) i ich własności. Operacje na zbiorach (domknięcie, wnętrze, brzeg, pochodna) i ich własności. Rodzaje odwzorowań (ciągłe, homeomorfizmy, izometrie) i ich niezmienniki. Przestrzenie ośrodkowe, aksjomaty przeliczalności. Aksjomaty oddzielania. Przestrzenie zwarte, spójne i zupełne. Topologie w przestrzeniach odwzorowań (w szczególności zbieżności jednostajnej). Pojęcie podprzestrzeni i produktu przestrzeni topologicznych. Homotopia przekształceń, homotopijna równoważność, grupa podstawowa. Topologiczna klasyfikacja rozmaitości wymiaru 1 i 2 (bez dowodu).

Literatura podstawowa

1. R. Duda, *Wprowadzenie do topologii*, PWN, Warszawa 1986.
2. R. Engelking, *Topologia ogólna*, WN PWN, Warszawa 2007.
3. J. Krzyszkowski, E. Turdza, *Elementy topologii*, WN AP, Kraków 2000.

Literatura uzupełniająca

1. R. Engelking, *Outline of General Topology*, North - Holland Publishing Company - Amsterdam, PWN - Polish Scientific Publishers, 1968.
2. K. Jänich, *Topologia*, Warszawa 1986.
3. J. Mioduszewski, *Wykłady z topologii. Topologia przestrzeni euklidesowych*, WUŚ, Katowice 1994.
4. J. Mioduszewski, *Wykłady z topologii. Zbiory spójne i kontinua*, WUŚ, Katowice 2003.
5. H. Patkowska, *Wstęp do topologii*, PWN, Warszawa 1979.
6. W. Rzymowski, *Przestrzenie metryczne w analizie*, Wydawnictwo UMCS, Lublin 2000.

Przedmioty kierunkowe z matematyki

1. Równania różniczkowe

Treści nauczania

Równania różniczkowe zwyczajne. Wiadomości wstępne: pojęcie równania, rozwiązania, ich rodzaje, zagadnienia początkowe, interpretacja geometryczna. Równania elementarnie całkowalne. Analityczne i numeryczne rozwiązywanie wybranych typów równań. Równania o zmiennych rozdzielonych, zupełne i do nich sprowadzalne. Równania liniowe o stałych współczynnikach. Podstawowe twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań zagadnień początkowych dla układów równań różniczkowych rzędu pierwszego i równań wyższych rzędów. Twierdzenie o ciągłej i gładkiej zależności rozwiązań od wartości początkowych i parametrów. Podstawowe własności rozwiązań układów równań różniczkowych liniowych I rzędu. Przestrzeń liniowa rozwiązań układu jednorodnego, jej baza - układ fundamentalny, wymiar, macierz fundamentalna, twierdzenie Liouville'a. Postać rozwiązania ogólnego układu niejednorodnego. Własności rozwiązań równań liniowych rzędu n-tego. Układy równań liniowych o stałych współczynnikach i algebraiczne sposoby ich rozwiązywania. Wyznaczenie układu fundamentalnego, macierzy fundamentalnej i rozwiązania ogólnego układu niejednorodnego. Punkty stacjonarne i ich stabilność. Stabilność rozwiązań równania różniczkowego w sensie Lapunowa, kryteria stabilności. Informacja o zagadnieniach brzegowych dla równań rzędu drugiego. Równania różniczkowe cząstkowe. Wiadomości wstępne, klasyfikacja równań różniczkowych cząstkowych. Podstawowe zagadnienia graniczne, początkowe, brzegowe, mieszane, pojęcie zagadnienia postawionego poprawnie. Równania cząstkowe rzędu pierwszego i ich związek z równaniami zwyczajnymi, całki pierwsze. Przybliżone rozwiązywanie równań różniczkowych.

Literatura

1. F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy ze wstępem do równań różniczkowych*, wyd. 16, PWN, Warszawa 1979.
2. W. Leksiński, W. Żakowski, *Matematyka cz. IV*, PWT, Warszawa 1984.
3. H. Marcinkowska, *Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych*, PWN, Warszawa 1972.
4. K. Maurin, *Analiza, cz. I: Elementy*, PWN, Warszawa 1971.
5. A. Pelczar, J. Szarski, *Wstęp do teorii równań różniczkowych*, PWN, Warszawa 1989.
6. W. Pogorzelski, *Analiza matematyczna, t. 3*, PWN, Warszawa 1949.
7. W. Pogorzelski, *Analiza matematyczna, t. 4*, PWN, Warszawa 1951.

2. Algebra z teorią liczb

Treści nauczania

Teoria podzielności w pierścieniu całkowitym: relacje dzielenia i stowarzyszenia; elementy rozkładalne, nierozkładalne, pierwsze; pierścienie z jednoznacznością rozkładu, największy wspólny dzielnik, najmniejsza wspólna wielokrotność. Ideały główne, pierścienie główne. Pierścienie Euklidesa, algorytm Euklidesa. Teoria podzielności w pierścieniu wielomianów. Twierdzenie Gaussa, wymierne pierwiastki wielomianu z $\mathbb{Z}[x]$, kryterium Eisensteina. Ciała skończone. Teoria Galois. Przegląd najważniejszych metod algebraicznych, geometrycznych, analitycznych i probabilistycznych w relacji do klasycznych problemów teorii liczb. Liczby pierwsze, nieskończoność zbioru liczb pierwszych. Liczby względnie pierwsze. Zasadnicze twierdzenie arytmetyki. Ułamki łańcuchowe. Równania diofantyczne (w szczególności postaci $ax + by = c$, gdzie a, b, c są ustalonymi elementami z $\mathbb{Z}$). Kongruencje w $\mathbb{Z}$. Cechy podzielności liczb. Małe twierdzenie Fermata. Twierdzenia: Wilsona, Eulera, Lagrange'a, chińskie o resztach. Reszty kwadratowe, kryterium Eulera, zastosowanie sum trygonometrycznych. Równania diofantyczne nieliniowe. Funkcje arytmetyczne (w szczególności: Eulera, Mobiusa, splot Dirichleta). Rozmieszczenie liczb pierwszych (funkcje dzeta, L). Liczby algebraiczne, liczby algebraiczne całkowite, liczby p-adyczne.

Literatura podstawowa

1. J. Gancarzewicz, *Arytmetyka*, Wydawnictwo UJ, Kraków 2000.
2. B. Gleichgewicht, *Algebra*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2004.
3. W. Marzantowicz, P. Zarzycki, *Elementarna teoria liczb*, PWN, Warszawa 2006.
4. J. Rutkowski, *Algebra abstrakcyjna w zadaniach*, PWN, Warszawa 2006.
5. W. Sierpiński, *Wstęp do teorii liczb*, WSiP, Warszawa 1987.
6. S. Y. Yan, *Teoria liczb w informatyce*, PWN, Warszawa 2006.

Literatura uzupełniająca

1. A. Białynicki-Birula, *Zarys algebry*, PWN, Warszawa 1987.
2. M. Bryński, J. Jurkiewicz, *Zbiór zadań z algebry*, PWN, Warszawa 1985.
3. A. Chronowski, *Podstawy arytmetyki szkolnej cz. 1 i 2.*, Wydawnictwo Kleks, Bielsko-Biała 1999.
4. W. Narkiewicz, *Teoria liczb*, PWN, Warszawa 2003.
5. W. Sierpiński, *Elementary Theory of Numbers*, PWN, Warszawa 1987.

3. Geometria

Treści nauczania

- Elementy geometrii różniczkowej.
  - Hiperpowierzchnie i rozmaitości; rozmaitości Riemanna.
  - Powierzchnie jako rozmaitości dwuwymiarowe, przestrzeń styczna i wektor normalny do powierzchni, orientacja powierzchni.
  - Pierwsza forma podstawowa powierzchni, odwzorowanie Gaussa, druga forma podstawowa.
  - Koneksja Levi-Civita i współczynniki Christoffela.
  - Odwzorowanie izometryczne powierzchni, powierzchnie rozwijalne.
  - Krzywizna normalna i geodezyjna, linie geodezyjne, asymptotyczne i krzywiznowe powierzchni.
  - Krzywizna Gaussa i krzywizny główne powierzchni.

  - Wzory Codazziego i podstawowe twierdzenie teorii powierzchni. Wzór Gaussa-Bonneta.

- Geometria euklidesowa i nieeuklidesowe w ujęciu syntetycznym.
  - Aksjomatyka Hilberta geometrii euklidesowej, tezy równoważne z aksjomatem Euklidesa.
  - Geometria Bolyaia-Łobaczewskiego; model Beltramiego-Kleina, Poincare'go (w kole otwartym, otwartej półpłaszczyźnie i na półsferze), wzajemne związki. Dowodzenie twierdzeń w oparciu o modele, w szczególności tez równoważnych zaprzeczeniem aksjomatu Euklidesa.
  - Geometria rzutowa; aksjomatyka płaszczyzny i przestrzeni. Modele geometrii rzutowej: afiniczny, centralny, na sferze, na półsferze i analityczny. Podstawowe twierdzenia geometrii rzutowej: twierdzenie Desarguesa, twierdzenie Pappusa, twierdzenie Fano; zastosowanie tych twierdzeń do konstrukcji geometrycznych. Zasada dualności w geometrii rzutowej. Czworokąt zupełny, czwórka harmoniczna punktów. Współrzędne jednorodne i przekształcenia rzutowe. Krzywe stożkowe w ujęciu rzutowym, twierdzenie Pascala.
  - Informacje o modelowaniu wybranych geometrii na gruncie geometrii rzutowej.
  - Informacja o programie Kleina. Typowe niezmienniki w poznanych geometriach.
  - Wykorzystanie powierzchni jako modeli geometrii nieeuklidesowych.

Literatura podstawowa

1. K. Borsuk i W. Szmielew, *Podstawy geometrii*, PWN, Warszawa 1975.
2. S. Fudali, *Geometria: skrypt dla studentów kierunku nauczycielskiego*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 1989.
3. B. Gdowski, *Elementy geometrii różniczkowej z zadaniami*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2005.
4. A. Goetz, *Geometria różniczkowa*, PWN, Warszawa 1965.

Literatura uzupełniająca

1. M. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1976.
2. H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry revisited*, Washington, The Mathematical Association of America, 1996.
3. R. Doman, *Wykłady z geometrii elementarnej*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2001.
4. J. Gancarzewicz, B. Opozda, *Wstęp do geometrii różniczkowej*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 2003.
5. R. Hartshorne, *Foundations of projective geometry*, W. A. Benjamin Inc, New York, 1967.
6. E. Marchow, *Geometria rzutowa*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2002.
7. J. Oprea, *Geometria różniczkowa i jej zastosowania*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002.

4. Efektywne metody geometrii algebraicznej

Treści nauczania

1. Wielomiany wielu zmiennych: przykłady problemów prowadzących do układu równań wielomianowych, zbiory algebraiczne, krótkie wprowadzenie do geometrii algebraicznej.

2. Metody efektywne: podstawowe algorytmy teorii baz Gröbnera, programy komputerowe CoCoa i Singular i ich wykorzystanie do: o Sprowadzania układu równań wielomianowych do postaci trójkątnej. o Sprawdzania czy dany układ ma rozwiązanie, analizy zbioru rozwiązań, badania skończoności zbioru rozwiązań itp. o Wyznaczania wielomianów interpolacyjnych wielu zmiennych.

Literatura

1. W. Fulton, *Algebraic Curves. An Introduction to Algebraic Geometry*, The Benjamin 1978.
2. D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals Varieties and Algorithms*, Springer, New York 2007.
3. M. Dumnicki, T. Winiarski, *Bazy Gröbnera, efektywne metody w wielomianowych układach równań*, Wydawnictwo Naukowe AP, Kraków 2007.

5. Teoria mnogości

Treści nauczania

1. Pojęcie klasy (zbiory i klasy właściwe), paradoks Russella.
2. Aksjomatyka teorii zbiorów: aksjomaty Zermela-Fraenkla, pewnik wyboru i jego równoważne sformułowania, w tym lemat Kuratowskiego-Zorna.
3. Konstrukcja liczb naturalnych von Neumanna i aksjomaty Peana.
4. Zbiory dobrze uporządkowane: typy porządkowe i liczby porządkowe.
5. Moc (liczba kardynalna) zbioru: zbiory skończone i nieskończone (kryterium Dedekinda skończoności zbioru), zbiory przeliczalne, zbiory mocy continuum, metoda przekątniowa Cantora.
6. Porównywanie liczb kardynalnych: twierdzenie Cantora-Bernsteina, twierdzenie Cantora o mocy zbioru potęgowego, hipoteza continuum.
7. Arytmetyka liczb kardynalnych.
8. Teorie formalne: pojęcia niesprzeczności i niezależności - przykłady.
9. Elementy teorii kategorii: kategorie zwyczajne, pojęcie obiektów, morfizmów oraz funktorów.

Literatura podstawowa

1. A. Chronowski, *Elementy teorii mnogości*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 2000.
2. B. Grell, *Wstęp do matematyki. Zbiory, struktury, modele*, Wydawnictwo UJ, Kraków 2006.
3. W. Guzicki, P. Zakrzewski, *Wykłady ze wstępu do matematyki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
4. K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004.
5. W. Marek, J. Onyszkiewicz, *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach*, Wydawnictwo PWN, Warszawa 2006.

Literatura uzupełniająca

1. A. Chronowski, *Zadania z elementów teorii mnogości i logiki matematycznej*, Wydawnictwo „Dla szkoły", Wilkowice 1999.

2. W. Guzicki, P. Zakrzewski, *Wstęp do matematyki. Zbiór zadań*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
3. K. Kuratowski, A. Mostowski, *Teoria mnogości*, PWN, Warszawa 1978.
4. I. A. Ławrow, Ł. L. Maksimowa, *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów*, Wydawnictwo Naukowe PWN 2004.
5. H. Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007.

6. Statystyka matematyczna i metody stochastyczne

Treści nauczania

1. Uzupełnienia z rachunku prawdopodobieństwa, rozkłady wielowymiarowe, twierdzenia graniczne.
2. Statystyka opisowa. Rozkłady statystyk z próby. Charakterystyki z próby, miary położenia, miary rozproszenia, charakterystyki kształtu, rozkłady statystyk z próby, użyteczne wykresy statystyki opisowej.
3. Rozkłady funkcji zmiennych losowych, ważniejsze rozkłady statystyk, rozkład Studenta, rozkład chi-kwadrat, rozkład F Snedecora.
4. Estymacja, metody wyznaczania estymatorów, estymacja średniej, estymacja wariancji, przedziały ufności. Estymacja nieparametryczna. Nierówność Rao-Cramera.
5. Weryfikacja hipotez, test dla wartości oczekiwanej, test istotności dla wariancji. Porównywanie dwóch i większej ilości prób. Testy zgodności chi-kwadrat, test Kołmogorowa.
6. Regresja liniowa i korelacja. Funkcja regresji, szacowanie jej parametrów.
7. Elementy teorii łańcuchów Markowa.
8. Przykłady procesów stochastycznych, proces Poissona, proces Wienera.

Literatura

1. P.Grzegorzewski, K.Bobecka, A.Dembińska, J.Pusz, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka*, Wyższa Szkoła Informatyki Stosowanej i Zarządzania, Warszawa 2003.
2. J.Jakubowski, R.Sztencel, *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, Skrypt, Warszawa 2000.
3. W.Klonecki, *Statystyka dla inżynierów*, PWN Warszawa 1999.
4. L.T.Kubik, *Zastosowanie elementarnego rachunku prawdopodobieństwa do wnioskowania statystycznego*, PWN Warszawa 1998.
5. J.Podgórski, *Statystyka dla studiów licencjackich*, PWE, Warszawa 2005.
6. M.Sobczyk, *Statystyka*, PWN, Warszawa 1998.

Przedmioty z matematyki stosowanej

1. Matematyka finansowa

Treści nauczania

1. Wycena papierów wartościowych. Weksle. Bony skarbowe. Certyfikaty depozytowe. Obligacje. Akcje.

2. Pochodne instrumenty finansowe i ich wycena. Kontrakty terminowe i ich charakterystyka. Opcje. Parametry opcji i czynniki wpływajace na ich cenę. Bilans zysku (strat) dla posiadacza i wystawcy opcji kupna (sprzedaży). Portfel wolny od ryzyka. Różne metody wyceny opcji - arbitrażowa i martyngałowa.

Literatura podstawowa

1. M. Matłoka, *Matematyka w finansach i bankowości*, Wydawnictwo AE w Poznaniu, Poznań 2000.
2. *Instrumenty pochodne - sympozjum matematyki finansowej*, Wydawnictwo "Universitas", Kraków 1997.

Literatura uzupełniająca

1. A. Weron, R. Weron, *Inżynieria finansowa*, WNT, Warszawa 1999.
2. J. Jakubowski, A. Palczewski, M. Rutkowski, L. Stettner, *Matematyka finansowa. Instrumenty pochodne*, WNT, Warszawa 2003.

2. Ekonometria

Treści nauczania

1. Modele i zmienne ekonometryczne: Modele ekonometryczne. Zmienne objaśniane i objaśniające. Eliminowanie quasi-stałych.

2. Metoda najmniejszych kwadratów: Założenia modelu regresji liniowej z jedna zmienną. Metoda najmniejszych kwadratów w przypadku modelu liniowego z jedna zmienną.

3. Błędy estymatorów: Estymator wariancji składnika losowego. Przedziały ufności parametrów i wartości teoretycznych modelu. Metoda najmniejszych kwadratów modelu regresji liniowej, modelu regresji liniowej z wieloma zmiennymi objaśniającymi. Założenia modelu regresji liniowej z wieloma zmiennymi objaśniającymi. Metoda najmniejszych kwadratów modelu liniowego z wieloma zmiennymi objaśniającymi. Własności metody najmniejszych

kwadratów modelu liniowego z wieloma zmiennymi objaśniającymi. Estymator wariancji składnika losowego i parametrów modelu liniowego z wieloma zmiennymi objaśniającymi. Przedziały ufności parametrów i wartości teoretycznych modelu liniowego z wieloma zmiennymi objaśniajacymi.

Literatura

1. A.Grińko, V.Mityushev, V.Mitiouchev(junior), N.Rylko *Ekonometria od podstaw z przykładami na Excelu*
2. B.Suchecki, *Kompletne modele popytu*, Warszawa 2006
3. M.Osińska, *Ekonometria finansowa*, Warszawa 2005
4. M.Łuniewska, *Ekonometria finansowa. Analiza rynku kapitałowego*, Warszawa 2008

3. Metody numeryczne

Treści nauczania

Metody przybliżonego rozwiązywania: układów równań liniowych [matoda Gaussa-Seidla] i nieliniowych [metoda Newtona-Raphsona], macierzowego zagadnienia własnego [metoda potęgowa (iteracji wektorów)] i zadania optymalizacyjnego [metoda Simplex]. Uwarunkowanie wybranych zadań numerycznych [zadanie obliczenia sumy i obliczenia pochodnej funkcji jako przykłady zadań źle lub dobrze uwarunkowanych (w zależności od przyjętych założeń dodatkowych)]. Wybrane metody aproksymacji w przestrzeniach funkcyjnych [aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi, aproksymacja jednostajna wielomianami Czebyszewa]. Elementy złożoności obliczeniowej. Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych [metoda Eulera, metody Rungego-Kutty]. Całkowanie numeryczne [kwadratury elementarne: wzór prostokątów, wzór trapezów, wzór Simpsona]. Współczesne narzędzia komputerowe i ich wykorzystywanie w praktycznych obliczeniach naukowych [programy Derive, Mathcad, Matlab].

Literatura podstawowa

1. Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski, *Metody numeryczne*, WNT, Warszawa 2006.
2. A. Bjorck, G. Dahlquist, *Numerical methods.* Mineola, NY: Dover Publications. xviii, 2003.

4. Numeryczne metody rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych

Treści nauczania

1. Kanoniczna postać równania.
2. Podstawowe typy równań: eliptyczne, paraboliczne, hiperboliczne.
3. Równania opisujące ruch falowy. Wizualizacja komputerowa fali.
4. Równania przewodnictwa cieplnego i dyfuzji.
5. Numeryczne metody rozwiązywania równań cząstkowych.
6. Zagadnienia prowadzące do równania Laplace'a i równania Poissona.
7. Funkcje uogólnione.

8. Przestrzeń Sobolewa.

9. Zagadnienia brzegowe i początkowo-brzegowe. Modele dyskretne.

10. Metoda Fouriera.

11. Metoda różnic skończonych.

12. Metoda elementów skończonych.

Literatura

1. A. W. Bicadze, *Równania fizyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1984.
2. F. Bierski, *Równania różniczkowe cząstkowe*, AGH, Kraków 1985.
3. M. M. Smirnow, *Zadania z równań różniczkowych cząstkowych*, PWN, Warszawa 1974.
4. A. N. Tichonow, A. A. Samarski, *Równania fizyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1963.
5. M. Krzyżański, *Równania różniczkowe cząstkowe, t. 1-2*, PWN, Warszawa 1971.

5. Matematyczne podstawy informatyki

Treści nauczania

Pojęcie języka formalnego i gramatyki. Wyrażenia regularne i języki regularne. Automat skończenie stanowy, automat niedeterministyczny, lemat o pompowaniu. Minimalizacja automatu. Język bezkontekstowy, automat ze stosem, algorytm rozpoznawania języka bezkontekstowego. Maszyna Turinga, model obliczania funkcji, model rozpoznawania języka. Języki rozstrzygalne i nierozstrzygalne, problem stopu, inne przykłady problemów nierozstrzygalnych. Złożoność czasowa i obliczeniowa maszyny Turinga. Pojęcie trudności obliczeniowej. Podstawowe klasy złożoności: P, NP, NPC, LOGSPACE, PSPACE. Logiki reprezentacji wiedzy w językach zapytań i odpowiedzi dla baz danych. Metody automatycznego dowodzenia twierdzeń oraz logicznego wspomagania weryfikacji i specyfikacji programów.

Literatura podstawowa

1. J. E. Hopcroft, R. Motwani, J. D. Ullman, *Wprowadzenie do teorii automatów, języków i obliczeń*, PWN 2005.
2. M. Sipser, *Introduction to the Theory of Computation*, Second Edition, PWS Publishing Company, 2005.

Literatura uzupełniająca

1. C. Papadimitriou, *Złożoność obliczeniowa*, WNT 2002.

6. Technologia informacyjna w matematyce stosowanej

Program tego przedmiotu będzie na bieżąco ustalany przez prowadzącego zajęcia w zależności od rozwoju oprogramowania w matematyce stosowanej, a w szczególności zmian w pakiecie oprogramowania Mathematica.

7. Matematyka dyskretna

Treści nauczania

Elementy teorii grafów - spójność, skojarzenia, cykle Hamiltona, kolorowanie wierzchołków i krawędzi grafu, planarność. Zagadnienia ekstremalne teorii grafów - twierdzenia Turana i Ramsaya. Elementy kombinatoryki - metody przeliczania obiektów kombinatorycznych, twierdzenie Polya, ekstremalna teoria zbiorów, zbiory częściowo uporządkowane, metoda probabilistyczna Erdosa.

Literatura podstawowa

1. K. A. Ross, Ch. R. B. Wright, *Matematyka dyskretna*, WN PWN, W-wa 2000.
2. R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, WN PWN, W-wa 2001.

Literatura uzupełniająca

1. R. J. Wilson, *Wprowadzenie do teorii grafów*, PWN, W-wa 2007.

8. Fizyka

Treści nauczania

1. Świat zjawisk fizycznych, skalary i wektory w fizyce, wielkości pochodne i pierwotne.
2. Oddziaływania w przyrodzie, zasady zachowania w fizyce.
3. Kinematyka punktu materialnego (układy odniesienia, ruch postępowy, prędkość, pęd, przyspieszenie, siły bezwładności, układy nieinercjalne, ruch w polu grawitacyjnym, rzuty).
4. Dynamika bryły sztywnej, ruch obrotowy, moment pędu, momenty bezwładności, twierdzenie Steinera, zasady dynamiki dla ruchu postępowego i obrotowego, warunki statyki dla ruchu postępowego i obrotowego).
5. Ruch harmoniczny (kinematyka ruchu harmonicznego, składanie drgań harmonicznych, przemiany energii mechanicznej, drgania tłumione i wymuszone).
6. Fale mechaniczne, powstawanie i rozchodzenie się fal, superpozycja i interferencja, fale akustyczne, rezonans mechaniczny).
7. Podstawy termodynamiki (I i II zasada termodynamiki, przemiany termodynamiczne).
8. Stałe pole elektryczne (prawo Coulomba, opis skalarny i wektorowy pola elektrostatycznego, zasada superpozycji pól, ruch ładunku w stałym polu elektrycznym, pojemność elektryczna).
9. Prąd elektryczny (prawo Ohma, prawa Kirchoffa, sieci elektryczne i elementy zastępcze).
10. Stałe pole magnetyczne (siła Lorentza, strumień indukcji magnetycznej, reguła Lentza, właściwości elektryczne i magnetyczne ciał).
11. Prąd zmienny (prądnica prądu zmiennego, transformator, oscyloskop, układy RLC).
12. Fale elektromagnetyczne (powstawanie i widmo fal elektromagnetycznych, dualizm falowo-korpuskularny).
13. Optyka geometryczna (prawa odbicia i załamania, zwierciadła, pryzmaty, soczewki, układy optyczne).

14. Elementy fizyki atomowej (postulaty Bohra, poziomy energetyczne, emisja i absorpcja, układ okresowy pierwiastków).

Wykładowca dokonuje wyboru tematyki spośród wyżej wymienionej.

Literatura podstawowa

1. C. Kajtoch, *Fizyczne podstawy nauk przyrodniczych*, WNAP, Kraków 2006.
2. C. Kajtoch (red.), *I Pracownia fizyczna*, WNAP, Kraków 2007.

Literatura uzupełniająca

1. R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *Feynmana wykłady z fizyki*, PWN, Warszawa 1970.
2. R. Resnick, D. Halliday, *Fizyka*, PWN, Warszawa 2001.

9. Wykład monograficzny

Szczegółowy program będzie podany po wyborze wykładów dokonanym przez studentów spośród zaproponowanych przez Instytut Matematyki.

10. Wykład specjalny z matematyki

Szczegółowy program będzie podany po wyborze wykładów dokonanym przez studentów spośród zaproponowanych przez Instytut Matematyki.

11. Wykład specjalny z matematyki stosowanej

Szczegółowy program będzie podany po wyborze wykładów dokonanym przez studentów spośród zaproponowanych przez Instytut Matematyki.

12. Seminarium dyplomowe z matematyki 1

Szczegółowy program będzie podany po wyborze seminariów dokonanym przez studentów spośród zaproponowanych przez Instytut Matematyki.

13. Seminarium dyplomowe z matematyki 2

Szczegółowy program będzie podany po wyborze seminariów dokonanym przez studentów spośród zaproponowanych przez Instytut Matematyki.

14. Seminarium dyplomowe z matematyki stosowanej 1

Szczegółowy program będzie podany po wyborze seminariów dokonanym przez studentów spośród zaproponowanych przez Instytut Matematyki.

15. Seminarium dyplomowe z matematyki stosowanej 2

Szczegółowy program będzie podany po wyborze seminariów dokonanym przez studentów spośród zaproponowanych przez Instytut Matematyki.

Praca dyplomowa i egzamin dyplomowy

1. Zalecenia do pisania, prowadzenia i oceny prac magisterskich oraz licencjackich z matematyki

W poniższym tekście Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie będzie zwany Uczelnią, a Instytut Matematyki - krócej Instytutem. Praca magisterska lub licencjacka będzie często zwana krócej - pracą.

I. Dokumenty dotyczące prac magisterskich i licencjackich

Podstawowymi dokumentami regulującymi zasady pisania, prowadzenia i oceny prac magisterskich i licencjackich są:

1. Regulamin Studiów.
2. Zarządzenia Dziekana w sprawie prac licencjackich i magisterskich.
3. Zarządzenie Dyrektora Instytutu Matematyki Akademii Pedagogicznej w sprawie przechowywania prac dyplomowych: licencjackich i magisterskich (zob. strona internetowa IM).
4. Zarządzenia dla magistrantów w Instytucie Matematyki AP, wydane przez Wicedyrektora Instytutu Matematyki (zob. strona internetowa IM).
5. Niniejszy dokument.

II. Cele pracy magisterskiej (licencjackiej)

Celem pracy magisterskiej (licencjackiej) z matematyki jest wykazanie przez studenta umiejętności:

1. samodzielnej pracy z tekstem z wyższej matematyki, nie objętym programem studiów, zarówno w języku polskim, jak i w języku obcym;
2. dostrzegania i uzupełniania opuszczonych fragmentów rozumowań i obliczeń w wykorzystywanej przy pisaniu pracy literaturze;
3. opracowywania problemów zawierających elementy metody pracy naukowej z matematyki (np. dobór stosownych przykładów i kontrprzykładów, uogólnienia twierdzeń itp.);
4. analizy porównawczej wybranego zagadnienia matematycznego na podstawie kilku pozycji literatury matematycznej.

Ważnym celem obu rodzajów prac jest przygotowanie ich na dobrym poziomie redakcyjnym. Praca powinna być przejrzysta, podzielona na stosowne jednostki tekstu (rozdziały, paragrafy), napisana poprawnym, jasnym i zwięzłym językiem.

III. Promotor pracy magisterskiej (licencjackiej)

1. Student ma prawo do wyboru promotora według zasad określonych w Regulaminie Studiów i zarządzeniach wydanych przez władze Instytutu.
2. Instytut organizuje seminaria magisterskie i dyplomowe - studenci mogą wybierać seminarium. Student, zgodnie z planem studiów, ma obowiązek uczestniczenia odpowiednio w seminarium magisterskim lub dyplomowym. Jeżeli student nie złoży do Dyrektora Instytutu odpowiedniego wniosku dotyczącego wyboru promotora, to wybór seminarium magisterskiego lub dyplomowego jest równoznaczny z wyborem promotora, którym jest osoba prowadząca seminarium. Na wniosek studenta Dyrektor Instytutu może wyrazić zgodę, przy zachowaniu wymogów dotyczących promotora określonych w Regulaminie Studiów, na wybór promotora spośród pracowników Instytutu, którzy nie prowadzą seminarium magisterskiego (dyplomowego), a także na wybór promotora spoza Instytutu; w tych przypadkach wybór seminarium powinien być uzgodniony przez studenta z promotorem i prowadzącym seminarium i zatwierdzony przez Dyrektora Instytutu. W wyjątkowych przypadkach student może zmienić - za zgodą Dyrektora Instytutu - wybrane seminarium magisterskie (dyplomowe) lub wybranego promotora.
3. Promotor formułuje temat pracy. Temat pracy może zaproponować student pod warunkiem zatwierdzenia tego tematu przez promotora.
4. Problematyka pracy powinna być ustalona nie później niż na rok przed planowym końcem studiów.
5. Przed rozpoczęciem pisania pracy promotor lub student, przy akceptacji promotora, formułują podstawowe jej cele, które mogą być uzupełniane przez cele szczegółowe w trakcie pisania pracy.
6. Promotor określa wymagania dotyczące pracy, których spełnienie gwarantuje pozytywną ocenę pracy. Oprócz warunków minimalnych należy wskazać studentowi kierunki rozwinięcia lub pogłębienia tematu pracy, umożliwiające uzyskanie wyższej oceny pracy.
7. Promotor udziela konsultacji studentowi w zakresie merytorycznej treści i redakcji pracy.
8. Promotor zobowiązany jest wymagać od studenta przedłożenia całej pracy przed jej ostatecznym zredagowaniem; po zatwierdzeniu przez promotora student redaguje ostateczną wersję pracy.

IV. Tematyka i forma pracy magisterskiej (licencjackiej)

1. Tematyka pracy powinna pozostawać w ścisłym związku z kierunkiem studiów i uwzględniać zainteresowania naukowe studenta.
2. Za pracę magisterską (licencjacką) można uznać temat opracowany przez studenta w ramach studenckiego ruchu naukowego.
3. Praca magisterska (licencjacka) może mieć charakter pracy zespołowej, zrealizowanej przez dwie osoby, po uzyskaniu zgody Dyrektora Instytutu. Zakres pracy każdego ze studentów musi być wyraźnie określony przez promotora pracy.
4. Strona tytułowa pracy powinna zawierać: pełną nazwę Uczelni, nazwę Instytutu, imię i nazwisko autora pracy, tytuł pracy, tytuł (stopień) naukowy oraz imię i nazwisko promotora, nazwę miejscowości będącej siedzibą Uczelni i rok złożenia ostatecznej wersji pracy.

5. Praca powinna mieć spis treści (z podaniem odpowiednich numerów stron).
6. We wstępie do pracy należy podać: ogólne i szczegółowe cele pracy, krótką charakterystykę treści poszczególnych jednostek tekstowych pracy, podstawową pozycję (pozycje) literatury inspirującą opracowanie tematu pracy, charakterystyczne znaki graficzne stosowane w pracy, sposób oznaczenia fragmentów tekstu uznanych przez autora pracy za opracowania zupełnie samodzielne (tzn. fragmenty prezentujące rozwiązanie problemów i zagadnień, których nie ma w znanej autorowi literaturze).
7. Na początku pracy powinny być zamieszczone precyzyjnie sformułowane pojęcia, twierdzenia, podstawowe oznaczenia, które będą wykorzystywane przy opracowaniu głównego tematu pracy.
8. Ważnymi elementami składowymi prac z dydaktyki matematyki są: przedstawienie problematyki w świetle poznanej literatury, określenie przedmiotu i celu prowadzonych badań, opis metod i narzędzi badawczych, analiza przeprowadzonych badań, elementy weryfikacji projektów badawczych, wnioski. Prace licencjackie z dydaktyki matematyki powinny dotyczyć nauczania matematyki przede wszystkim w szkołach podstawowych i gimnazjach.
9. Twierdzenia (lematy, wnioski) powinny być napisane kursywą, natomiast definicje - prostą czcionką z wyróżnionym kursywą definiowanym pojęciem.
10. Na końcu pracy powinien znajdować się spis literatury sformatowany zgodnie z powszechnie przyjętymi systemami zapisu literatury w pracach naukowych odpowiednio z matematyki lub dydaktyki matematyki. W spisie muszą być wymienione wszystkie pozycje literatury wykorzystanej w pracy. W przypadku korzystania z materiałów znajdujących się w Internecie, w spisie literatury należy podać: imię i nazwisko autora (autorów) publikacji, tytuł publikacji i pełny adres strony internetowej zawierającej daną publikację. Na życzenie promotora lub recenzenta student ma obowiązek dostarczenia wydruku ze strony internetowej publikacji wykorzystanych w pracy.
11. Odwołania do pozycji literatury w tekście pracy powinny być zgodne z powszechnie stosowanymi systemami odwołań w pracach naukowych odpowiednio z matematyki lub dydaktyki matematyki.
12. Każdy fragment pracy oparty w sposób istotny na literaturze powinien być szczegółowo opisany za pomocą systemu cytowań i odwołań w taki sposób, aby nie powstało nawet podejrzenie o plagiat.
13. W pracy powinna być stosowana jednolita terminologia zgodna z polską tradycją pisania naukowych tekstów matematycznych.
14. Istotne błędy merytoryczne dyskwalifikują pracę.
15. Objętość prac: prace magisterskie (licencjackie) z matematyki nie powinny przekraczać 40 (20) stron,
16. Student składa pracę magisterską (licencjacką) w Dziekanacie w postaci określonej odpowiednimi zarządzeniami Dziekana i Dyrektora Instytutu (zob. I.2-I.4).

V. Ocena pracy magisterskiej (licencjackiej)

1. Pracę magisterską (licencjacką) ocenia pomotor pracy i recenzent powołany przez Dyrektora Instytutu; co najmniej jedna z osób oceniających pracę magisterską powinna mieć tytuł naukowy profesora lub stopień doktora habilitowanego.
2. Głównymi elementami składowymi oceny pracy są: treść merytoryczna, poprawność merytoryczna, metody badań, osiągnięte wyniki, samodzielność i oryginalność w badaniach i rozumowaniach, realizacja celów pracy, zgodność treści z tematem, wykorzystanie literatury, wartości aplikacyjne, poprawność terminologiczna, językowa i

redakcyjna. Jeżeli praca jest zespołowa, to promotor powinien umieścić w swojej recenzji i również podać recenzentowi dokładne informacje o zakresie i wkładzie pracy każdego z jej autorów, co umożliwi ustalenie indywidualnej oceny osiągnięć autorów.

3. Ocena pracy powinna być podana w stopniach według skali ustalonej w Regulaminie Studiów przy ocenie egzaminu przedmiotowego.
4. Podczas egzaminu magisterskiego (licencjackiego) student ma obowiązek ustosunkować się do uwag recenzentów, a zwłaszcza do zarzutów dotyczących pracy, stawianych przez recenzentów.
5. Promotor pracy i recenzent przygotowują recenzje w postaci ustalonej odpowiednimi zarządzeniami Dziekana i Dyrektora Instytutu (zob. I.2-I.4). Jeden egzemplarz recenzji należy złożyć w Sekretariacie ds. Dydaktycznych nie później niż trzy dni przed terminem obrony pracy.

2. Wymagania do egzaminu magisterskiego

Na egzaminie magisterskim student powinien wykazać się znajomością i dobrym rozumieniem podstawowych pojęć matematycznych i ich własności oraz znajomością podstawowych zagadnień z dydaktyki matematyki. Ponadto powinien dobrze operować językiem matematycznym, umieć przedstawić syntetycznie kluczowe problemy matematyki wyższej, a także widzieć związki matematyki wyższej z matematyką elementarną.

Każdy student powinien być przygotowany do odpowiedzi na wszystkie zagadnienia działu I oraz wszystkie zagadnienia z wybranego przez siebie i uzgodnionego z promotorem jednego z działów: II, III, IV, V i VI. Wybór tego działu musi być zgłoszony przy składaniu pracy. Na wniosek studenta i promotora Dyrektor Instytutu może wyznaczyć studentowi indywidualne pensum do egzaminu magisterskiego, które zastąpi wybór jednego z działów II-VI (dział I pozostaje obowiązkowy).

I. Pojęcia i wiadomości podstawowe

1. Pojęcia teorii aksjomatycznej i jej modelu.
2. Elementarne pojęcia rachunku zdań.
3. Aksjomatyczny system teorii mnogości.
4. Liczby kardynalne i porządkowe.
5. Relacje równoważnościowe i porządkowe. Definiowanie pojęć matematycznych za pomocą relacji równoważnościowych. Uporządkowanie podstawowych zbiorów liczbowych.
6. Systemy aksjomatyczne arytmetyki liczb naturalnych. Konstrukcja zbioru liczb naturalnych w teorii mnogości. Konstrukcje podstawowych struktur liczbowych (liczby całkowite, wymierne, rzeczywiste i zespolone).
7. Aksjomatyczne ujęcie geometrii elementarnej. Różne geometrie i ich modele.
8. Geometria krzywych. Krzywe regularne, długość krzywej, trójścian Freneta.
9. Geometria powierzchni. Wektor normalny, płaszczyzna styczna, pole płata.
10. Definicje i modele podstawowych struktur algebraicznych, struktury ilorazowe.
11. Homomorfizmy struktur algebraicznych. Podstawowe własności oraz przykłady w poszczególnych strukturach.
12. Przestrzeń wektorowa, jej baza i wymiar; podprzestrzeń generowana przez zbiór; przykłady.
13. Algebra macierzy, wyznaczniki i układy równań liniowych.

14. Układy współrzędnych w przestrzeniach afinicznych i euklidesowych. Równania prostych i płaszczyzn.
15. Przekształcenia afiniczne.
16. Krzywe i powierzchnie stopnia 2.
17. Aksjomatyka rachunku prawdopodobieństwa. Prawdopodobieństwo warunkowe, prawdopodobieństwo całkowite, wzór Bayesa. Niezależność zdarzeń. Przykłady przestrzeni probabilistycznych.
18. Zmienne losowe jedno- i dwuwymiarowe i generowane przez nie przestrzenie probabilistyczne na prostej i na płaszczyźnie. Niezależność zmiennych losowych. Dystrybuanta. Wartość oczekiwana i wariancja.
19. Różne rodzaje zbieżności. Prawo wielkich liczb Bernoulliego. Twierdzenia graniczne.
20. Różne definicje granicy ciągu i granicy funkcji. Podstawowe własności granic ciągów funkcji.
21. Szeregi liczbowe. Kryteria zbieżności.
22. Różne definicje ciągłości funkcji. Własności funkcji ciągłych.
23. Topologia i sposoby jej wprowadzania. Odwzorowania ciągłe i homeomorfizmy.
24. Pochodna funkcji jednej zmiennej. Ekstrema funkcji, wypukłość. Twierdzenia o wartości średniej i ich zastosowania. Wzór Taylora.
25. Różniczki funkcji wielu zmiennych, pochodne cząstkowe, pochodna kierunkowa.
26. Funkcje analityczne, twierdzenie całkowe Cauchy'ego, wzór całkowy Cauchy'ego, ich konsekwencje.
27. Proces całkowy w definicjach różnego rodzaju całek (wielokrotnych, krzywoliniowych, powierzchniowych).
28. Przestrzenie Banacha. Podstawowe przykłady przestrzeni ciągowych i funkcyjnych oraz operatorów liniowych ciągłych na tych przestrzeniach.
29. Miara i jej podstawowe własności. Miara Lebesgue'a, miara Jordana.

II. Analiza matematyczna i topologia

1. Różne rodzaje przestrzeni topologicznych (przestrzenie zwarte, spójne, zupełne, ośrodkowe); aksjomaty oddzielania.
2. Własności funkcji ciągłych rzeczywistych, określonych na przestrzeniach metrycznych.
3. Własności granic ciągów funkcyjnych i sum szeregów funkcyjnych.
4. Ekstrema i ekstrema warunkowe dla funkcji wielu zmiennych.
5. Zastosowanie twierdzenia Liouville'a do dowodu zasadniczego twierdzenia algebry.

6. Twierdzenie o identyczności funkcji analitycznych. Twierdzenie o zachowaniu obszaru dla funkcji analitycznych. Zastosowana tych twierdzeń.
7. Miara zewnętrzna, twierdzenie Caratheodory'ego, miara Lebesgue'a i jej własności.
8. Całka Lebesgue'a, własności i związek z całką Riemanna.
9. Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych.
10. Przykłady metod rozwiązywania pewnych typów równań różniczkowych pierwszego i drugiego rzędu.
11. Przestrzenie Banacha i Hilberta jako przykłady łączenia struktury topologicznej i liniowej. Operatory i funkcjonały liniowe ciągłe.
12. Szeregi Fouriera w przestrzeni Hilberta. Kryteria zbieżności dla funkcji rzeczywistych.

III. Algebra

1. Grupy i pierścienie, dzielniki normalne i ideały, struktury ilorazowe.
2. Element pierwszy i nierozkładalny; pierścień Gaussa, pierścień główny, pierścień noetherowski, pierścień Dedekinda.
3. Przywiedlność i nieprzywiedlność wielomianów nad danymi pierścieniami.
4. NWP i NWW. Pierścienie Euklidesa i algorytm Euklidesa.
5. Elementy algebraiczne i elementy przestępne nad ciałem; rozszerzenia algebraiczne, rozszerzenia skończone, rozszerzenie o element algebraiczny.
6. Ciała algebraicznie domknięte. Zasadnicze twierdzenie algebry.
7. Przestrzenie euklidesowe; od iloczynu skalarnego przez normę do metryki; ortogonalność; postać iloczynu skalarnego.
8. Izometrie, własności, reprezentacje, macierze ortogonalne, przykłady.
9. Postacie kanoniczne formy kwadratowej. Własności. Formy kwadratowe dodatnio określone.
10. Macierz przekształcenia liniowego względem danych baz, rząd przekształcenia.

IV. Geometria

1. Pojęcie geometrii w sensie Kleina. Podstawowe niezmienniki grup przekształceń rzutowych, afinicznych i euklidesowych (izometrii).
2. Twierdzenie o rozkładzie izometrii na symetrie względem hiperpłaszczyzn.
3. Klasyfikacja izometrii przestrzeni $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$.
4. Izometrie własne wielokątów i wielościanów foremnych.
5. Warunki wykonalności konstrukcji cyrklem i linijką.
6. Konstruowalność wielokątów foremnych. Złoty podział.
7. Warunki rownoważne V postulatowi Euklidesa.
8. Dualność w geometrii rzutowej. Przykłady twierdzeń dualnych.
9. Dwustosunek czwórki punktow. Czworokąt zupełny. Punkty harmoniczne.
10. Przykłady powierzchni orientowalnych i nieorientowalnych.
11. Powierzchnie o stałej krzywiźnie.
12. Formy fundamentalne.
13. Pojęcie geodezyjnych i przykłady.

V. Rachunek prawdopodobieństwa z elementami statystyki matematycznej

1. Przestrzeń probabilistyczna (definicja aksjomatyczna). Ziarnista (dyskretna) przestrzeń probabilistyczna. Przestrzeń probabilistyczna jako model doświadczenia losowego.
2. Zmienna losowa jedno- (dwu-) wymiarowa i generowana przez nią przestrzeń probabilistyczna na prostej (na płaszczyźnie).
3. Szeregi liczbowe i funkcyjne w rachunku prawdopodobieństwa. Funkcja charakterystyczna zmiennej losowej. Momenty zmiennej losowej.
4. Twierdzenia graniczne.
5. Podstawowe rozkłady prawdopodobieństwa i przykłady przestrzeni probabilistycznych o tych rozkładach (rozkład Bernoulliego, Poissona, normalny, itd.).
6. Populacja. Cecha. Próba. Statystyka. Estymacja i weryfikacja hipotez.
7. Regresja liniowa i korelacja. Funkcja regresji, szacowanie jej parametrów.

VI. Zastosowania matematyki

1. Wycena papierów wartościowych i opcji.
2. Estymatory. Model regresji liniowej z wieloma zmiennymi objaśniającymi.
3. Metody przybliżonego rozwiązania układów równań liniowych i nieliniowych.
4. Metoda najmniejszych kwadratów.
5. Wybrane metody aproksymacji w przestrzeniach funkcyjnych.
6. Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych.
7. Automaty skończenie stanowe, niedeterministyczne. Minimalizacja automatu.
8. Maszyna Turinga. Jej złożonośc czasowa i obliczeniowa. Podstawowe klasy złożoności.
9. Zagadnienia ekstremalne teorii grafów.
10. Zagadnienia prowadzące do równania Laplace'a i równania Poissona.
11. Wykorzystanie programów komputerowych w praktycznych obliczeniach naukowych.

Przedmioty fakultatywne

1. Arytmetyka gospodarcza

Treści nauczania

Zasady i sposoby opanowania rachunku proporcji, obliczeń procentowych i promilowych, a także walutowych. Działania na liczbach wielorakich, obliczenia towarowe oraz związane z obsługą klientów w sklepie, a także obliczanie wyników działalności sklepu i przedsiębiorstwa handlowego.

Literatura

1. I.Sobocińska, *Arytmetyka gospodarcza*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa
2. J.Promińska, *Arytmetyka gospodarcza*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1977
3. E.Smaga, *Arytmetyka finansowa*, Wydawnictwo PWN, 1999

2. Obliczenia finansowe

Treści nauczania

Kapitalizacja prosta. Kapitalizacja złożona. Kapitalizacja ciągła. Kapitalizacja z góry. Stopa równoważąca. Stopa efektywna. Stopa średnioroczna. Dyskonto w kapitalizacji prostej. Dyskonto w kapitalizacji złożonej. Renty. Wartość kapitału w przyszłości (stałe wpłaty, odstępy czasu, okres wpłat równy okresom kapitalizacji i okresowi stopy procentowej). Renta wieczysta. Wartość kapitału w przyszłości. Renta z przyrostem arytmetycznym. Renta z przyrostem geometrycznym. Wartość kapitału po dokonaniu wypłat renty. Kredyty.

Literatura podstawowa

1. M.Matłoka, J. Światłowski, *Matematyka finansowa CD i funkcje finansowe arkusz*, Wydawnictwo: Wyższa Szkoła Bankowa, 2004
2. E.Smaga, *Arytmetyka finansowa*, Wydawnictwo PWN, 1999
3. K.Piasecki, *Modele matematyki finansowej*, Wydawnictwo PWN, 2007
4. J.Jakubowski, A.Palczewski, M.Rutkowski, *Matematyka finansowa. Instrumenty pochodne*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2007

3. Komputerowe metody w ekonometrii

Treści nauczania

1. Nieliniowe modele ekonometryczne: Niektóre funkcje wykorzystywane w ekonometrii. Linearyzacja modeli sensu scricte. Modele ze zmiennymi zero-jedynkowymi. Weryfikacja modelu ekonometrycznego. Szacunek dokładności estymatorów linii regresji próby. Szacunek

wielkości udziału zmiennych objaśniających w zmienności wartości teoretycznej. Badania współliniowości zmiennych objaśniajacych. Badanie symetrii składnika losowego. Badanie losowości składnika losowego. Badanie autokorelacji składnika losowego. Badanie stałości wariancji składnika losowego. Badanie normalności składnika losowego.

2. Prognozowanie: Prognozowanie bezwarunkowe. Prognozowanie warunkowe.

Literatura

1. A.Griňko, V.Mityushev, V.Mitiouchev(junior), N.Rylko *Ekonometria od podstaw z przykładami na Excelu*
2. B.Suchecki, *Kompletne modele popytu*, Warszawa 2006
3. M.Osińska, *Ekonometria finansowa*, Warszawa 2005
4. M.Łuniewska, *Ekonometria finansowa. Analiza rynku kapitałowego*, Warszawa 2008

4. Metody statystyczne w naukach ekonomicznych

Treści nauczania

Współczynniki korelacji. Obliczenie współczynnika korelacji. Macierze współczynników korelacji. Specjalne przypadki współczynnika korelacji. Czynniki wpływające na współczynnik korelacji. Metody doboru zmiennych. Metoda Hellwiga. Prosta metoda grafowa. Wskaźniki syntetyczne.

Literatura

1. A.Griňko, V.Mityushev, V.Mitiouchev(junior), N.Rylko *Ekonometria od podstaw z przykładami na Excelu*
2. M.Gruszczyński, M.Podgórska, *Ekonometria*, Warszawa 2004
3. G.S.Maddala, *Ekonometria*, Warszawa 2008

5. TeX

Treści nauczania

1. TeX jako system składu. Fonty. LaTeX i pdfLaTeX. Polecenia LaTeX-a i notacja. Znaki specjalne. Cudzysłowy, myślniki, ligatury. Akcenty i różne symbole. Podstawowy opis składni LaTeX-a. Kodowanie polskich znaków w LaTeX-ie. Struktura dokumentu LaTeX-a. Preambuła dokumentu LaTeX-a. Treść dokumentu LaTeX-a.

2. Wybrane elementy składu. Formatowanie akapitu. Odstępy poziome i pionowe, łamanie wierszy i stron. Zmiana pisma. Cytowania. Wyszczególnienia, wyliczenia. Układ logiczny dokumentu. Układ i parametry strony. Główki, stopki.

3. Tabele w LaTeX-ie. Ogólny schemat budowy tabeli. Przykłady prostych tabel. Formatowanie tekstu w tabeli. Łączenie komórek tabeli.

4. Przypisy, noty, odsyłacze. Przypisy. Notatki na marginesie. Odsyłacze. Podsumowanie. Pytania kontrolne. Spis treści, skorowidz, własne polecenia. Tworzenie spisu treści. Tworzenie skorowidzu. Tworzenie własnych poleceń.

5. Matematyka w LaTeX-ie. Tryb matematyczny. Symbole, indeksy, ułamki. Nawiasy, pierwiastki, macierze. Równania - tworzenie i formatowanie. Równania wielowierszowe. TeX - program i język programowania. Tworzenie przywołań bibliograficznych w LaTeX-ie.

Literatura

1. L.Lamport, *LaTeX Podręcznik i przewodnik użytkownika*, 2004
2. *Biblioteka podręczników internetowych*: http://sunsite2.icm.edu.pl/pub/GUST/doc/
3. *Biblioteka podręczników internetowych*: http://www.gust.org.pl/gustnews/TBE
4. D.E.Knuth, *Podręcznik użytkownika*, WNT 2005

6. Elementy bankowości

Treści nauczania

Program kursu dotyczy bankowości i ma być uzgodniony z prowadzącym poza uczelni. Zajęcia poprowadzi odpowiedni specjalista z banku.