

**UNIWERSYTET PEDAGOGICZNY  
IM. KOMISJI EDUKACJI NARODOWEJ  
W KRAKOWIE  
INSTYTUT MATEMATYKI**

# **Program nauczania**

**dla studiów stacjonarnych drugiego stopnia (nauczycielskich)**

**kierunek: matematyka**

# 1. Przedmioty podstawowe z matematyki

## 1.1 Analiza matematyczna 1

### Rok I

### TREŚCI NAUCZANIA

1. **Teoria miary.** Ciała,  $\sigma$ -ciała, miara, zbiory borelowskie. Miara zewnętrzna. Twierdzenie Caratheodory'ego. Produktowanie miar. Miara Lebesgue'a w  $\mathbb{R}$  i w  $\mathbb{R}^k$ . Własności miary Lebesgue'a. Funkcje mierzalne i ich zbieżność. Informacje o mierze Jordana.
2. **Całka względem miary.** Całka z funkcji prostej, całka z funkcji mierzalnej i nieujemnej. Całka Lebesgue'a. Twierdzenie Fubini'ego; twierdzenie o podstawianiu (dowód dla jednej zmiennej). Twierdzenia o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki. Całka Riemanna, a całka Lebesgue'a.

### LITERATURA PODSTAWOWA

1. A. Birkholc, *Analiza matematyczna. Funkcje wielu zmiennych*, PWN, Warszawa 2002.
2. J. Dieudonne, *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York and London, 1969.
3. W. Kołodziej, *Analiza matematyczna*, PWN, Warszawa 1978.
4. J. Musielak, M. Jaroszewska, *Analiza matematyczna t. II cz.2, 3*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2002.
5. W. Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, PWN, Warszawa 2002.
6. R. Rudnicki, *Wykłady z analizy matematycznej*, PWN, Warszawa 2006.
7. R. Sikorski, *Rachunek różniczkowy i całkowy (funkcji wielu zmiennych)*, PWN, Warszawa 1967.
8. M. Spivak, *Analiza na różnaitościach*, PWN, Warszawa 2006.

### LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

1. S. Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, PWN, Warszawa 1976.
2. K. Maurin, *Analiza, cz. I,II*, PWN, Warszawa 1991.
3. L. Schwartz, *Kurs analizy matematycznej, t.I,II*, PWN, Warszawa 1979.

## 1.2 Analiza matematyczna 2

### Rok I

### TREŚCI NAUCZANIA

**Elementy analizy matematycznej na różnaitościach.** Powierzchnie gładkie w przestrzeni euklidesowej. Przestrzeń styczna. Formy różniczkowe. Całkowanie form różniczkowych. Twierdzenie Stokesa i jego szczególne przypadki. Potencjał, pole potencjalne. Warunki konieczne i dostateczne potencjalności pola.

### LITERATURA PODSTAWOWA

1. G. N. Berman, *Zbiór zadań z analizy matematycznej*, Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice 1999.
2. A. Birkholc, *Analiza matematyczna, funkcje wielu zmiennych*, WN PWN, Warszawa 2002.
3. J. Dieudonne, *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York and London, 1969.
4. W. Kołodziej, *Analiza matematyczna*, PWN, Warszawa 1978.
5. J. Musielak, L. Skrzypczak, *Analiza matematyczna t. III cz.1*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2006.
6. W. Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, PWN, Warszawa 2002.
7. R. Rudnicki, *Wykłady z analizy matematycznej*, WN PWN, Warszawa 2006.

8. R. Sikorski, *Rachunek różniczkowy i całkowy (funkcji wielu zmiennych)*, wyd. 5., PWN, Warszawa 1967.
9. M. Spivak, *Analiza na rozmaitościach*, wyd. 2., PWN, Warszawa 2006.

#### LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

1. K. Maurin, *Analiza, cz. I,II*, PWN, Warszawa 1991.
2. L. Schwartz, *Kurs analizy matematycznej, t.I,II*, PWN, Warszawa 1979.

### 1.3 Analiza zespolona

#### Rok II TREŚCI NAUCZANIA

1. Szeregi potęgowe. Lemat Abela. Twierdzenie Cauchy'ego-Hadamarda. Funkcje holomorficzne. Pierścień funkcji holomorficznych. Funkcje całkowite, holomorficzność sumy szeregu potęgowego.
2. Pochodna zespolona. Równania Cauchy'ego Riemanna. Funkcje analityczne. Twierdzenie Weierstrassa o analityczności szeregu potęgowego.
3. Całka krzywoliniowa zorientowana i niezorientowana. Twierdzenie całkowe Cauchy'ego, wzór całkowy Cauchy'ego (dla koła). Holomorficzność funkcji analitycznej, istnienie pochodnych wszystkich rzędów. Nierówność Cauchy'ego. Twierdzenie Liouville'a. Podstawowe twierdzenie algebry.
4. Zera funkcji holomorficznej. Zasada identyczności dla funkcji holomorficznych, zasada maksimum. Twierdzenie Morery.
5. Szereg Laurenta. Punkt regularny, izolowany punkt osobliwy. Punkt pozornie osobliwy, biegun, punkt istotnie osobliwy, przykłady. Charakteryzacja punktów pozornie osobliwych. Twierdzenie Riemanna o osobliwości. Charakteryzacja biegunów. Twierdzenie Casoratiego-Weierstrassa-Sochockiego.
6. Indeks punktu. Residuum, twierdzenie o residuach, zastosowanie twierdzenia o residuach dla niewłaściwej całki rzeczywistej

#### LITERATURA

1. J. Bak, D. J. Newmann, *Complex analysis*, UTM, Springer, 1996.
2. J. Chądzyński, *Wstęp do analizy zespolonej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2000.
3. E. Hille, *Analytic function theory*, AMS Bookstore, 1973.
4. J. Krzyż, *Zbiór zadań z funkcji analitycznych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
5. F. Leja, *Funkcje zespolone*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.
6. W. Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998.
7. S. Saks, A. Zygmund, *Funkcje analityczne*, Monografie Matematyczne, Vol.28, Warszawa-Wrocław, 1952. (w postaci plików pdf:<http://matwbn.icm.edu.pl/ksspis.php?wyd=10>).
8. B. W. Szabat, *Wstęp do analizy zespolonej*, PWN, Warszawa 1974.
9. W. Więśław, *Liczby i geometria*, WSiP, Warszawa 1996.

### 1.4 Analiza funkcjonalna

#### Rok II TREŚCI NAUCZANIA

1. Przestrzenie unormowane i Banacha: własności normy, zupełność, uzupełnianie przestrzeni unormowanych, przykłady przestrzeni unormowanych ciągłych i funkcyjnych, skończenie wymiarowe przestrzenie unormowane, zwartość (w przypadku skończenie i nieskończenie wymiarowym), szeregi w przestrzeniach unormowanych.
2. Przestrzenie unitarne i Hilberta: nierówność Schwarz'a, związki iloczynu skalarnego z normą, uzupełnianie przestrzeni unitarnych, ortogonalność, dopełnienie ortogonalne (twierdzenie o rzucie ortogonalnym), układy ortonormalne (ortogonalizacja i ortonormalizacja układu

wektorów), układy ortonormalne zupełne, szeregi Fouriera (nierówność Bessela, tożsamość Parsewala, układ trygonometryczny, szereg Fouriera względem układu trygonometrycznego), twierdzenie Riesz-Fishera.

3. Operatory liniowe ciągłe: ograniczoność i ciągłość, norma operatora, przestrzeń dualna, twierdzenie Riesz o postaci funkcjonałów liniowych w przestrzeni Hilberta, twierdzenie Banacha o operatorze otwartym, twierdzenie o operatorze odwrotnym, twierdzenie o domkniętym wykresie, twierdzenie Banacha-Steinhaus, twierdzenie Hahna-Banacha, operatory sprzężone.
4. Informacje uzupełniające: elementy teorii aproksymacji, analizy spektralnej, zastosowania analizy funkcjonalnej.

#### LITERATURA PODSTAWOWA

1. J. Chmieliński, *Analiza funkcjonalna. Notatki do wykładu*, wyd. 2., Wydawnictwo Naukowe AP, Kraków 2004.
2. W. Kołodziej, *Wybrane rozdziały analizy matematycznej*, wyd. 2., Biblioteka Matematyczna t.36, PWN, Warszawa 1982.
3. J. Musielak, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*, PWN, Warszawa 1989.

#### LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

1. A. Alexiewicz, *Analiza funkcjonalna, Monografie Matematyczne*, t. 40, PWN, Warszawa 1969.
2. J.R. Giles, *Introduction to the Analysis of Normed linear Spaces*, Cambridge University Press, Cambridge 2000.
3. W. Mlak, *Wstęp do teorii przestrzeni Hilberta*, wyd. 4., Biblioteka Matematyczna t. 35, PWN, Warszawa 1987.
4. W. Pleśniak, *Wykłady z teorii aproksymacji*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 2000.
5. W. Rudin, *Analiza funkcjonalna*, PWN, Warszawa 2001.
6. K. Yosida, *Functional Analysis*, 6th. ed., Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1980.
7. J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, 2nd. ed., Springer, New York 1990

## 1.5 Topologia

### Rok I

### TREŚCI NAUCZANIA

Pojęcie przestrzeni topologicznej, przykłady (w szczególności przestrzeń metryczna). Różne rodzaje zbiorów (otwarte, domknięte, brzegowe, gęste, nigdziegęste, pierwszej kategorii) i ich własności. Operacje na zbiorach (domknięcie, wnętrze, brzeg, pochodna) i ich własności. Rodzaje odwzorowań (ciągłe, homeomorfizmy, izometrie) i ich niezmienniki. Przestrzenie ośrodkowe, aksjomaty przeliczalności. Aksjomaty oddzielania. Przestrzenie zwarte, spójne i zupełne. Topologie w przestrzeniach odwzorowań (w szczególności zbieżności jednostajnej). Pojęcie podprzestrzeni i produktu przestrzeni topologicznych. Homotopia przekształceń, homotopijna równoważność, grupa podstawowa. Topologiczna klasyfikacja rozmaitości wymiaru 1 i 2 (bez dowodu).

#### LITERATURA PODSTAWOWA

1. R. Duda, *Wprowadzenie do topologii*, PWN, Warszawa 1986.
2. R. Engelking, *Topologia ogólna*, WN PWN, Warszawa 2007.
3. J. Krzyszkowski, E. Turdza, *Elementy topologii*, WN AP, Kraków 2000.

## LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

1. R. Engelking, *Outline of General Topology*, North - Holland Publishing Company - Amsterdam, PWN - Polish Scientific Publishers, 1968.
2. K. Jänisz, *Topologia*, Warszawa 1986.
3. J. Mioduszewski, *Wykłady z topologii. Topologia przestrzeni euklidesowych*, WUŚ, Katowice 1994.
4. J. Mioduszewski, *Wykłady z topologii. Zbiory spójne i kontinua*, WUŚ, Katowice 2003.
5. H. Patkowska, *Wstęp do topologii*, PWN, Warszawa 1979.
6. W. Rzymowski, *Przestrzenie metryczne w analizie*, Wydawnictwo UMCS, Lublin 2000.

## 2. Przedmioty kierunkowe z matematyki

### 2.1 Równania różniczkowe

#### Rok I

#### TREŚCI NAUCZANIA

Równania różniczkowe zwyczajne. Wiadomości wstępne: pojęcie równania, rozwiązania, ich rodzaje, zagadnienia początkowe, interpretacja geometryczna. Równania elementarnie całkowalne. Analityczne i numeryczne rozwiązywanie wybranych typów równań. Równania o zmiennych rozdzielonych, zupełne i do nich sprowadzalne. Równania liniowe o stałych współczynnikach. Podstawowe twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań zagadnień początkowych dla układów równań różniczkowych rzędu pierwszego i równań wyższych rzędów. Twierdzenie o ciągłej i gładkiej zależności rozwiązań od wartości początkowych i parametrów. Podstawowe własności rozwiązań układów równań różniczkowych liniowych I rzędu. Przestrzeń liniowa rozwiązań układu jednorodnego, jej baza - układ fundamentalny, wymiar, macierz fundamentalna, twierdzenie Liouville'a. Postać rozwiązania ogólnego układu niejednorodnego. Własności rozwiązań równań liniowych rzędu n-tego. Układy równań liniowych o stałych współczynnikach i algebraiczne sposoby ich rozwiązywania. Wyznaczenie układu fundamentalnego, macierzy fundamentalnej i rozwiązania ogólnego układu niejednorodnego. Punkty stacjonarne i ich stabilność. Stabilność rozwiązań równania różniczkowego w sensie Lapunowa, kryteria stabilności. Informacja o zagadnieniach brzegowych dla równań rzędu drugiego. Równania różniczkowe cząstkowe. Wiadomości wstępne, klasyfikacja równań różniczkowych cząstkowych. Podstawowe zagadnienia graniczne, początkowe, brzegowe, mieszane, pojęcie zagadnienia postawionego poprawnie. Równania cząstkowe rzędu pierwszego i ich związek z równaniami zwyczajnymi, całki pierwsze. Przybliżone rozwiązywanie równań różniczkowych.

#### LITERATURA

1. F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy ze wstępem do równań różniczkowych*, wyd. 16, PWN, Warszawa 1979.
2. W. Leksiński, W. Żakowski, *Matematyka cz. IV*, PWT, Warszawa 1984.
3. H. Marcinkowska, *Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych*, PWN, Warszawa 1972.
4. K. Maurin, *Analiza, cz. I: Elementy*, PWN, Warszawa 1971.
5. A. Pelczar, J. Szarski, *Wstęp do teorii równań różniczkowych*, PWN, Warszawa 1989.
6. W. Pogorzelski, *Analiza matematyczna, t. 3*, PWN, Warszawa 1949.
7. W. Pogorzelski, *Analiza matematyczna, t. 4*, PWN, Warszawa 1951.

### 2.2 Algebra z teorią liczb

#### Rok I

#### TREŚCI NAUCZANIA

Teoria podzielności w pierścieniu całkowitym: relacje dzielenia i stowarzyszenia; elementy rozkładalne, nierozkładalne, pierwsze; pierścienie z jednoznacznością rozkładu, największy wspólny dzielnik, najmniejsza wspólna wielokrotność. Ideały główne, pierścienie główne. Pierścienie

Euklidesa, algorytm Euklidesa. Teoria podzielności w pierścieniu wielomianów. Twierdzenie Gaussa, wymierne pierwiastki wielomianu z  $\mathbb{Z}[x]$ , kryterium Eisensteina. Ciała skończone. Teoria Galois. Przegląd najważniejszych metod algebraicznych, geometrycznych, analitycznych i probabilistycznych w relacji do klasycznych problemów teorii liczb. Liczby pierwsze, nieskończoność zbioru liczb pierwszych. Liczby względnie pierwsze. Zasadnicze twierdzenie arytmetyki. Ułamki łańcuchowe. Równania diofantyczne (w szczególności postaci  $ax+by=c$ , gdzie  $a,b,c$  są ustalonymi elementami z  $\mathbb{Z}$ ). Kongruencje w  $\mathbb{Z}$ . Cechy podzielności liczb. Małe twierdzenie Fermata. Twierdzenia: Wilsona, Eulera, Lagrange'a, chińskie o resztach. Reszty kwadratowe, kryterium Eulera, zastosowanie sum trygonometrycznych. Równania diofantyczne nieliniowe. Funkcje arytmetyczne (w szczególności: Eulera, Mobiusa, splot Dirichleta). Rozmieszczenie liczb pierwszych (funkcje dzeta, L). Liczby algebraiczne, liczby algebraiczne całkowite, liczby p-adyczne.

#### LITERATURA PODSTAWOWA

1. J. Gancarzewicz, *Arytmetyka*, Wydawnictwo UJ, Kraków 2000.
2. B. Gleichgewicht, *Algebra*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2004.
3. W. Marzantowicz, P. Zarzycki, *Elementarna teoria liczb*, PWN, Warszawa 2006.
4. J. Rutkowski, *Algebra abstrakcyjna w zadaniach*, PWN, Warszawa 2006.
5. W. Sierpiński, *Wstęp do teorii liczb*, WSiP, Warszawa 1987.
6. S. Y. Yan, *Teoria liczb w informatyce*, PWN, Warszawa 2006.

#### LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

1. A. Białynicki-Birula, *Zarys algebry*, PWN, Warszawa 1987.
2. M. Bryński, J. Jurkiewicz, *Zbiór zadań z algebry*, PWN, Warszawa 1985.
3. A. Chronowski, *Podstawy arytmetyki szkolnej cz. 1 i 2.*, Wydawnictwo Kleks, Bielsko-Biała 1999.
4. W. Narkiewicz, *Teoria liczb*, PWN, Warszawa 2003.
5. W. Sierpiński, *Elementary Theory of Numbers*, PWN, Warszawa 1987.

## 2.3 Geometria

### Rok I TREŚCI NAUCZANIA

#### I. Elementy geometrii różniczkowej.

1. Hiperpowierzchnie i rozmaitości; rozmaitości Riemanna.
2. Powierzchnie jako rozmaitości dwuwymiarowe, przestrzeń styczna i wektor normalny do powierzchni, orientacja powierzchni.
3. Pierwsza forma podstawowa powierzchni, odwzorowanie Gaussa, druga forma podstawowa.
4. Koneksja Levi-Civita i współczynniki Christoffela.
5. Odwzorowanie izometryczne powierzchni, powierzchnie rozwijalne.
6. Krzywizna normalna i geodezyjna, linie geodezyjne, asymptotyczne i krzywiznowe powierzchni.
7. Krzywizna Gaussa i krzywizny główne powierzchni.
8. Wzory Codazziego i podstawowe twierdzenie teorii powierzchni. Wzór Gaussa-Bonneta.

#### II. Geometria euklidesowa i nieeuklidesowa w ujęciu syntetycznym.

1. Aksjomatyka Hilberta geometrii euklidesowej, tezy równoważne z aksjomatem Euklidesa.
2. Geometria Bolyaia-Łobaczewskiego; model Beltramiego-Kleina, Poincare'go (w kole otwartym, otwartej półpłaszczyźnie i na półsfery), wzajemne związki. Dowodzenie

twierdzeń w oparciu o modele, w szczególności też równoważnych zaprzeczeniem aksjomatu Euklidesa.

3. Geometria rzutowa; aksjomatyka płaszczyzny i przestrzeni. Modele geometrii rzutowej: afiniczny, centralny, na sferze, na półsferze i analityczny. Podstawowe twierdzenia geometrii rzutowej: twierdzenie Desarguesa, twierdzenie Pappusa, twierdzenie Fano; zastosowanie tych twierdzeń do konstrukcji geometrycznych. Zasada dualności w geometrii rzutowej. Czworokąt zupełny, czwórka harmoniczna punktów. Współrzędne jednorodne i przekształcenia rzutowe. Krzywe stożkowe w ujęciu rzutowym, twierdzenie Pascala.
4. Informacje o modelowaniu wybranych geometrii na gruncie geometrii rzutowej.
5. Informacja o programie Kleina. Typowe niezmienniki w poznanych geometriach.
6. Wykorzystanie powierzchni jako modeli geometrii nieeuklidesowych.

#### LITERATURA PODSTAWOWA

1. K. Borsuk i W. Szmielew, *Podstawy geometrii*, PWN, Warszawa 1975.
2. S. Fudali, *Geometria: skrypt dla studentów kierunku nauczycielskiego*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 1989.
3. B. Gdowski, *Elementy geometrii różniczkowej z zadaniami*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2005.
4. A. Goetz, *Geometria różniczkowa*, PWN, Warszawa 1965.

#### LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

1. M. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1976.
2. H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry revisited*, Washington, The Mathematical Association of America, 1996.
3. R. Doman, *Wykłady z geometrii elementarnej*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2001.
4. J. Ganczarzewicz, B. Opozda, *Wstęp do geometrii różniczkowej*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 2003.
5. R. Hartshorne, *Foundations of projective geometry*, W. A. Benjamin Inc, New York, 1967.
6. E. Marchow, *Geometria rzutowa*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2002.
7. J. Oprea, *Geometria różniczkowa i jej zastosowania*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002.

## 2.4 Efektywne metody geometrii algebraicznej

### Rok I

### TREŚCI NAUCZANIA

1. Wielomiany wielu zmiennych: przykłady problemów prowadzących do układu równań wielomianowych, zbiory algebraiczne, krótkie wprowadzenie do geometrii algebraicznej.
2. Metody efektywne: podstawowe algorytmy teorii baz Gröbnera, programy komputerowe CoCoa i Singular i ich wykorzystanie do:
  - 2.1. Sprowadzania układu równań wielomianowych do postaci trójkątnej.
  - 2.2. Sprawdzania czy dany układ ma rozwiązanie, analizy zbioru rozwiązań, badania skończoności zbioru rozwiązań itp.
  - 2.3. Wyznaczania wielomianów interpolacyjnych wielu zmiennych.

#### LITERATURA

1. W. Fulton, *Algebraic Curves. An Introduction to Algebraic Geometry*, The Benjamin 1978.
2. D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals Varieties and Algorithms*, Springer, New York 2007.
3. M. Dumnicki, T. Winiarski, *Bazy Gröbnera, efektywne metody w wielomianowych układach równań*, Wydawnictwo Naukowe AP, Kraków 2007.

## 2.5 Matematyczne podstawy informatyki

### Rok I

### TREŚCI NAUCZANIA

Pojęcie języka formalnego i gramatyki. Wyrażenia regularne i języki regularne. Automat skończenie stanowy, automat niedeterministyczny, lemat o pompowaniu. Minimalizacja automatu. Język bezkontekstowy, automat ze stosem, algorytm rozpoznawania języka bezkontekstowego. Maszyna Turinga, model obliczania funkcji, model rozpoznawania języka. Języki rozstrzygalne i nierozstrzygalne, problem stopu, inne przykłady problemów nierozstrzygalnych. Złożoność czasowa i obliczeniowa maszyny Turinga. Pojęcie trudności obliczeniowej. Podstawowe klasy złożoności: P, NP, NPC, LOGSPACE, PSPACE. Logiki reprezentacji wiedzy w językach zapytań i odpowiedzi dla baz danych. Metody automatycznego dowodzenia twierdzeń oraz logicznego wspomaganie weryfikacji i specyfikacji programów.

### LITERATURA PODSTAWOWA

1. J. E. Hopcroft, R. Motwani, J. D. Ullman, *Wprowadzenie do teorii automatów, języków i obliczeń*, PWN 2005.
2. M. Sipser, *Introduction to the Theory of Computation, Second Edition*, PWS Publishing Company, 2005.

### LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

1. C. Papadimitriou, *Złożoność obliczeniowa*, WNT 2002.

## 2.6 Metody numeryczne

### Rok I

### TREŚCI NAUCZANIA

Metody przybliżonego rozwiązywania: układów równań liniowych [metoda Gaussa-Seidla] i nieliniowych [metoda Newtona-Raphsona], macierzowego zagadnienia własnego [metoda potęgowa (iteracji wektorów)] i zadania optymalizacyjnego [metoda Simplex]. Uwarunkowanie wybranych zadań numerycznych [zadanie obliczenia sumy i obliczenia pochodnej funkcji jako przykłady zadań źle lub dobrze uwarunkowanych (w zależności od przyjętych założeń dodatkowych)]. Wybrane metody aproksymacji w przestrzeniach funkcyjnych [aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi, aproksymacja jednostajna wielomianami Czebyszewa]. Elementy złożoności obliczeniowej. Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych [metoda Eulera, metody Rungego-Kutty]. Całkowanie numeryczne [kwadratury elementarne: wzór prostokątów, wzór trapezów, wzór Simpsona]. Współczesne narzędzia komputerowe i ich wykorzystywanie w praktycznych obliczeniach naukowych [programy Derive, Mathcad, Matlab].

### LITERATURA PODSTAWOWA

1. Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski, *Metody numeryczne*, WNT, Warszawa 2006.
2. A. Bjorck, G. Dahlquist, *Numerical methods. Mineola*, NY: Dover Publications. xviii, 2003.

### LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

1. A. Ralston, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN Warszawa, 1983.
2. A. Bjorck, G. Dahlquist, *Metody numeryczne*, PWN, Warszawa 1987.



## 2.7 Rachunek prawdopodobieństwa z elementami statystyki matematycznej

### Rok II

### TREŚCI NAUCZANIA

Aksjomatyczne ujęcie rachunku prawdopodobieństwa. Prawdopodobieństwo jako miara unormowana. Niezależność  $\sigma$ -ciał. Produkt kartezjański przestrzeni probabilistycznych. Przestrzenie produktowe jako przestrzenie probabilistyczne dla serii doświadczeń niezależnych. Prawdopodobieństwo geometryczne. Zmienna losowa jako funkcja mierzalna. Rozkład zmiennej losowej jako miara unormowana generowana na prostej przez funkcję mierzalną. Dystrybuanta zmiennej losowej. Zmienna losowa ciągła - rozkłady ciągłe. Niezależność zmiennych losowych. Parametry rozkładu (momenty) zmiennej losowej (wariancja, macierz, kowariancja).

Ciągi zmiennych losowych i ich rozkładów. Rodzaje zbieżności w teorii prawdopodobieństwa. Zbieżność stochastyczna. Twierdzenia graniczne. Słabe prawo wielkich liczb, mocne prawa wielkich liczb. Prawo wielkich liczb Bernoulliego. Prawo wielkich liczb Chinczyna. Twierdzenie Poissona. Rozkład Poissona. Przybliżenie Poissona. Rozkład prostokątny. Rozkład normalny Gaussa. Rozkład wykładniczy. Twierdzenie Moivre'a-Laplace'a.

Zmienna losowa wielowymiarowa (wektor losowy). Rozkład wektora losowego. Rozkłady brzegowe. Rozkłady warunkowe. Zmienne losowe niezależne. Rozkłady sum niezależnych zmiennych losowych. Metoda transformacji. Funkcje tworzące. Proces gałązkowy. Funkcja charakterystyczna zmiennej losowej. Funkcja charakterystyczna a momenty. Funkcja charakterystyczna a rozkład sumy niezależnych zmiennych losowych. Pojęcie procesu stochastycznego. Przykłady procesów stochastycznych. Twierdzenie Kołmogorowa o zgodnych miarach. Warunkowa wartość oczekiwana. Martynał.

Stochastyczny model procesu podejmowania decyzji w warunkach ryzyka. Macierz korzyści. Gra strategiczno-losowa jako model procesu decyzyjnego.

Jednorodny łańcuch Markowa jako szczególny schemat losowy. Graf stochastyczny Engla jako środek opisu i badania łańcucha Markowa. Redukcje grafu stochastycznego. Graf Engla a algorytmy obliczania prawdopodobieństwa i wartości oczekiwanej w przeliczalnej przestrzeni probabilistycznej.

Zagadnienia estymacji. Estymator. Estymator zgodny. Estymator nieobciążony. Statystyka średnia z próbki. Rozkład statystyki średnia z próbki w przypadku cechy o rozkładzie normalnym a funkcja charakterystyczna. Metoda największej wiarygodności. Testowanie hipotez. Poziom istotności. Test istotności. Obszar krytyczny.

Gra losowa jako środek matematycznej aktywizacji ucznia. Stochastyczne zadania jako ilustracja procesu stosowania matematyki. Rysunek jako narzędzie matematyzacji i argumentacji w rachunku prawdopodobieństwa. Dane statystyczne a refleksja *a posteriori* (wyjaśnianie na gruncie rachunku prawdopodobieństwa pewnych zaskakujących faktów ujawnionych przez dane statystyczne). Przynrzędy losujące jako generatory rozkładów prawdopodobieństwa i jako nośniki ogólnomatematycznych struktur.

Kształtowanie pojęć stochastycznych jako problem dydaktyki matematyki. Wnioskowania przez symetrie i analogie w stochastyce. Pojęcia i metody stochastyczne w nauczaniu matematyki a ilustracja procesu stosowania matematyki. Stochastyczne paradoksy i sofizmaty.

### LITERATURA

1. D. Bobrowski, *Probabilistyka w zastosowaniach technicznych*, WN-T, Warszawa 1986.
2. W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, t.I*, PWN, Warszawa 1987.
3. M. Fisz, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, PWN, Warszawa 1958.
4. J. Jakubowski, R. Sztencel, *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, SCRIPT, Warszawa 2001.
5. L.T. Kubik, *Rachunek prawdopodobieństwa. Podręcznik dla kierunków nauczycielskich studiów matematycznych*, PWN, Warszawa 1986.
6. A. Płocki, *Prawdopodobieństwo wokół nas. Rachunek prawdopodobieństwa w zadaniach i problemach*, Wydawnictwo DLA SZKOŁY, Wilkowice 2004.
7. A. Płocki, *Stochastyka dla nauczyciela. Rachunek prawdopodobieństwa, kombinatoryka i statystyka matematyczna jako matematyka „in statu nascendi”*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock 2005.

8. A. Płocki, *Dydaktyka stochastyki*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock 2005.

## 2.8 Teoria mnogości

### Rok II TREŚCI NAUCZANIA

1. Pojęcie klasy (zbiory i klasy właściwe), paradoks Russella.
2. Aksjomatyka teorii zbiorów: aksjomaty Zermela-Fraenkla, pewnik wyboru i jego równoważne sformułowania, w tym lemat Kuratowskiego-Zorna.
3. Konstrukcja liczb naturalnych von Neumanna i aksjomaty Peana.
4. Zbiory dobrze uporządkowane: typy porządkowe i liczby porządkowe.
5. Moc (liczba kardynalna) zbioru: zbiory skończone i nieskończone (kryterium Dedekinda skończoności zbioru), zbiory przeliczalne, zbiory mocy continuum, metoda przekątniowa Cantora.
6. Porównywanie liczb kardynalnych: twierdzenie Cantora-Bernsteina, twierdzenie Cantora o mocy zbioru potęgowego, hipoteza continuum.
7. Arytmetyka liczb kardynalnych.
8. Teorie formalne: pojęcia niesprzeczności i niezależności - przykłady.
9. Elementy teorii kategorii: kategorie zwyczajne, pojęcie obiektów, morfizmów oraz funktorów.

### LITERATURA PODSTAWOWA

1. A. Chronowski, *Elementy teorii mnogości*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 2000.
2. B. Grell, *Wstęp do matematyki. Zbiory, struktury, modele*, Wydawnictwo UJ, Kraków 2006.
3. W. Guzicki, P. Zakrzewski, *Wykłady ze wstępu do matematyki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
4. K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004.
5. W. Marek, J. Onyszkiewicz, *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach*, Wydawnictwo PWN, Warszawa 2006.

### LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

1. A. Chronowski, *Zadania z elementów teorii mnogości i logiki matematycznej*, Wydawnictwo „Dla szkoły”, Wilkowiec 1999.
2. W. Guzicki, P. Zakrzewski, *Wstęp do matematyki. Zbiór zadań*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
3. K. Kuratowski, A. Mostowski, *Teoria mnogości*, PWN, Warszawa 1978.
4. I. A. Ławrow, Ł. L. Maksimowa, *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów*, Wydawnictwo Naukowe PWN 2004.
5. H. Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007.

## 2.9 Matematyka dyskretna

### Rok II TREŚCI NAUCZANIA

Elementy teorii grafów - spójność, skojarzenia, cykle Hamiltona, kolorowanie wierzchołków i krawędzi grafu, planarność. Zagadnienia ekstremalne teorii grafów - twierdzenia Turana i Ramsaya. Elementy kombinatoryki - metody przeliczania obiektów kombinatorycznych, twierdzenie Polya, ekstremalna teoria zbiorów, zbiory częściowo uporządkowane, metoda probabilistyczna Erdosa.

### LITERATURA PODSTAWOWA

1. K. A. Ross, Ch. R. B. Wright, *Matematyka dyskretna*, WN PWN, W-wa 2000.
2. R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, WN PWN, W-wa 2001.

## LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

1. R. J. Wilson, *Wprowadzenie do teorii grafów*, PWN, W-wa 2007.

## 2.10 Wykład monograficzny

### Rok II TREŚCI NAUCZANIA

Szczegółowy program będzie podany po wyborze wykładów dokonany przez studentów spośród zaproponowanych przez Instytut Matematyki.

## 2.11 Technologia informacyjna w nauczaniu matematyki

### Rok I TREŚCI NAUCZANIA

1. Wykorzystanie platformy e-learningowej do nauczania matematyki na przykładzie platformy Moodle.
2. Zastosowanie kalkulatorów, kalkulatorów graficznych, programów komputerowych w procesie kształcenia pojęć matematycznych oraz ich rola w przewyżnianiu trudności występujących w tradycyjnym nauczaniu matematyki podczas kształtowania pojęć z zakresu analizy i algebry.
3. Zastosowanie kalkulatorów, kalkulatorów graficznych, programów komputerowych w rozwiązywaniu zadań matematycznych. Rola tych środków w przewyżnianiu typowych trudności towarzyszących uczniowi w trakcie rozwiązywania zadań i problemów z zakresu analizy i algebry.
4. Zastosowanie kalkulatorów, kalkulatorów graficznych, programów komputerowych w prowadzeniu rozumowań matematycznych z zakresu analizy i algebry.
5. Rola komputera w procesie kształtowania języka matematycznego.
6. Rola komputera i kalkulatora w procesie czytania tekstu matematycznego.

## LITERATURA

1. D. Gaul, *Elektroniczne sprawdziany z matematyki dla gimnazjum*, Wydawnictwo „Dla szkoły”, Bielsko-Biała 1999.
2. (red. H. Kąkol), *Matematyka i komputery*, SNM, Bielsko-Biała 1999.
3. (red. H. Kąkol), *Matematyka z elementami informatyki dla gimnazjum, Klasa 1*, Wydawnictwo „Dla szkoły”, Wilkowice 1998.
4. (red. H. Kąkol), *Matematyka z elementami informatyki dla gimnazjum, Klasa 2*, Wydawnictwo „Dla szkoły” Wilkowice 1999.
5. (red. H. Kąkol), *Matematyka z elementami informatyki dla gimnazjum, Klasa 3*, Wydawnictwo „Dla szkoły” Wilkowice 2000.
6. W. Pająk, *Analiza problemów otwartych wspomaganych Cabri*, Wydawnictwo „Dla szkoły”, Bielsko-Biała 1999.
7. *Matematyka, czasopismo dla nauczycieli*, WSiP, Wrocław.
8. *Matematyka i Komputery*, czasopismo Grupy Roboczej SNM, Bielsko-Biała.
9. *Nauczyciele i Matematyka [NiM]*, czasopismo SNM, Bielsko-Biała.
10. *Nauczyciele i Matematyka plus Technologia Informacyjna*, SNM, Bielsko-Biała.
11. Materiały pokonferencyjne ICTMT (International Conference on Technology in Mathematics Teaching).
12. Materiały i artykuły zamieszczone na [www.ap.krakow.pl/mat/komputery/](http://www.ap.krakow.pl/mat/komputery/)
13. Dydaktyczne programy komputerowe i dla kalkulatorów graficznych.
14. Materiały zamieszczone na kursie e-learningowym na [www.mat.ap.krakow.pl/moodle/](http://www.mat.ap.krakow.pl/moodle/)
15. Aktualna literatura tematu oraz materiały ze stron internetowych poświęconych tej tematyce.

## 2.12 Wykład specjalny z matematyki

### CELE NAUCZANIA

Przygotowanie słuchaczy do podjęcia tematów pracy magisterskiej.

### Rok I TREŚCI NAUCZANIA

Treści nauczania ustalane są przez prowadzącego seminarium ze studentami.

## 2.13 Wykład specjalny z dydaktyki matematyki

### CELE NAUCZANIA

Przygotowanie słuchaczy do podjęcia tematów pracy magisterskiej.

### Rok I TREŚCI NAUCZANIA

Treści nauczania ustalane są przez prowadzącego seminarium ze studentami.

## 2.14 Seminarium dyplomowe z matematyki 1

### CELE NAUCZANIA

Przygotowanie pracy magisterskiej, mającej na celu wyrobienie u studenta umiejętności przedstawiania na piśmie wybranych treści matematycznych.

### Rok I TREŚCI NAUCZANIA

Treści nauczania ustalane są przez prowadzącego seminarium ze studentami.

## 2.15 Seminarium dyplomowe z dydaktyki matematyki 1

### CELE NAUCZANIA

Przygotowanie pracy magisterskiej, mającej na celu wyrobienie u studenta umiejętności przedstawiania na piśmie wybranych treści matematycznych.

### Rok II TREŚCI NAUCZANIA

Treści nauczania ustalane są przez prowadzącego seminarium ze studentami.

## 2.16 Seminarium dyplomowe z matematyki 2

### CELE NAUCZANIA

Przygotowanie pracy magisterskiej, mającej na celu wyrobienie u studenta umiejętności przedstawiania na piśmie wybranych treści matematycznych.

## **Rok II**                      **TREŚCI NAUCZANIA**

Treści nauczania ustalane są przez prowadzącego seminarium ze studentami.

### **2.17 Seminarium dyplomowe z dydaktyki matematyki 2**

#### **CELE NAUCZANIA**

Przygotowanie pracy magisterskiej, mającej na celu wyrobienie u studenta umiejętności przedstawiania na piśmie wybranych treści matematycznych.

## **Rok II**                      **TREŚCI NAUCZANIA**

Treści nauczania ustalane są przez prowadzącego seminarium ze studentami.

### **2.18 Seminarium dyplomowe z matematyki 3**

#### **CELE NAUCZANIA**

Przygotowanie pracy magisterskiej, mającej na celu wyrobienie u studenta umiejętności przedstawiania na piśmie wybranych treści matematycznych.

## **Rok II**                      **TREŚCI NAUCZANIA**

Treści nauczania ustalane są przez prowadzącego seminarium ze studentami.

### **2.19 Seminarium dyplomowe z dydaktyki matematyki 3**

#### **CELE NAUCZANIA**

Przygotowanie pracy magisterskiej, mającej na celu wyrobienie u studenta umiejętności przedstawiania na piśmie wybranych treści matematycznych.

## **Rok II**                      **TREŚCI NAUCZANIA**

Treści nauczania ustalane są przez prowadzącego seminarium ze studentami.

## **3. Przedmioty kształcenia nauczycielskiego**

### **3.1 Psychologiczne aspekty okresu dorastania**

#### **Rok I**                      **TREŚCI NAUCZANIA**

Zmiany w funkcjonowaniu poznawczym i społecznym w okresie dorastania oraz ich wpływ na styl uczenia się. Psychologiczno-społeczne uwarunkowania rozwoju tożsamości młodzieży. Rola osób znaczących i autorytetów w procesie edukacji. Zaburzenia funkcjonowania w okresie dorastania. Czynniki ryzyka i czynniki wspomagające rozwój w okresie dorosłości. Kształtowanie się stylu życia. Droga rozwoju zawodowego w okresie dorosłości.

Wspieranie uczniów w radzeniu sobie z problemami okresu dorastania. Stymulowanie rozwoju społeczno-moralnego młodzieży. Przygotowanie do samokształcenia i pracy nad własnym rozwojem.

Pomoc uczniom w projektowaniu ścieżki edukacyjno-zawodowej i przygotowaniu do aktywnego poruszania się na rynku pracy.

## 3.2 Dydaktyka matematyki 1

### Rok I

### TREŚCI NAUCZANIA

Definiowanie pojęć matematycznych: istota i typy definicji matematycznej; problemowe wprowadzanie definicji; poziomy rozumienia definicji; trudności i błędy w tworzeniu, odtwarzaniu i stosowaniu definicji.

Formułowanie i dowodzenie twierdzeń: pojęcie twierdzenia i dowodu, typy twierdzeń i dowodów, problemowe wprowadzanie twierdzeń, motywacja dowodzenia, poszukiwanie i redagowanie oraz odczytywanie dowodu, trudności i błędy w formułowaniu twierdzeń i dowodzeniu.

Dedukcyjna struktura matematyki w nauczaniu: dedukcja lokalna; dedukcja globalna.

Podstawa programowa i inne dokumenty dotyczące nauczania matematyki do poziomu szkół ponadgimnazjalnych kończących się maturą. Wymagania maturalne.

Badania w zakresie dydaktyki matematyki.

### LITERATURA PODSTAWOWA

1. H. Siwek, *Dydaktyka matematyki: teoria i zastosowania*, WSiP, Warszawa 2005.
2. S. Turnau, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN, Warszawa 1990.
3. G. Polya, *Jak to rozwiązać?*, PWN, Warszawa 1993.
4. Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki tomy 1, 2,3*, WSiP, Warszawa 1977.
5. H. Siwek, *Czynnościowe nauczanie matematyki*, WSiP, Warszawa 1998.
6. W. Nowak, *Konwersatorium z dydaktyki matematyki*, PWN, Warszawa 1989.

### LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

1. Z. Krygowska, M. Ciosek, S. Turnau, *Strategie rozwiązywania zadań matematycznych jako problem dydaktyki matematyki*, WSP. Rocznik Nauk.-Dydakt. 54, Kraków 1974.
2. (pod red. J. Żabowskiego), *Prace prof. dr Anny Zofii Krygowskiej. Materiały do studiowania matematyki, tom I*, Wydawnictwo Naukowe Novum, Płock 2000.
3. (pod red. J. Żabowskiego), *Prace prof. dr hab. Bogdana J. Noweckiego. Materiały do studiowania matematyki, tom II*, Wydawnictwo Naukowe Novum, Płock 2001.
4. (pod red. J. Żabowskiego), *Prace dr Macieja Klakli. Materiały do studiowania matematyki, tom III*, Wydawnictwo Naukowe Novum, Płock 2002.
5. (pod red. J. Żabowskiego), *Prace prof. dr hab. Jana Koniora. Materiały do studiowania matematyki, tom IV*, Wydawnictwo Naukowe Novum, Płock 2002.
6. G. Polya, *Odkrycie matematyczne*, WN-T, Warszawa 1975.

Wybrane artykuły z czasopism dla nauczycieli:

1. *Matematyka, Czasopismo dla nauczycieli*, WSiP, Wrocław.
2. *Nauczyciele i Matematyka [NiM]*, Stowarzyszenie Nauczycieli Matematyki, Bielsko-Biała.
3. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V. Dydaktyka Matematyki*, Kraków.
4. *Studia Matematyczne Akademii Świętokrzyskiej*, Wydawnictwo Akademii Świętokrzyskiej, Kielce.
5. *Wiadomości Matematyczne*, Rocznik Polskiego Towarzystwa Matematycznego, seria II, PWN Warszawa.
6. S. K.Goel, M., *The equation:  $-2 = (-8)^{1/3} = (-8)^{2/6} = [(-8)^2]^{1/6} = 2$* , Educational Studies in Mathematics 1997 vol.33.

Podręczniki szkolne, przewodniki dla nauczycieli i materiały dydaktyczne

## 3.3 Dydaktyka matematyki 2

### Rok I

### TREŚCI NAUCZANIA

#### Teoretyczne:

Język matematyki: składniki (werbalny, symboliczny, algorytmiczny, rysunkowy), ich charakterystyka i rola w matematyce i jej poznaniu.

Intuicja w matematyce i jej nauczaniu: intuicja pierwotna i przedłużona; błędy intuicji.

Wyobrażenia przestrzenne, jej rola, kształtowanie; inne typy wyobrażeń.

Możliwości matematyczne ucznia w szkole ponadgimnazjalnej. Strategie wspomagania uczenia się (w zależności od potrzeb edukacyjnych uczniów). Praca z uczniem zdolnym, praca z uczniem słabym; matura z matematyki. Samokształcenie i warsztat pracy ucznia; formy prezentacji osiągnięć indywidualnych ucznia.

Dydaktyczne wykorzystanie na różnych poziomach nauczania wiedzy o bryłach przestrzennych i przekształceniach geometrycznych płaszczyzny i przestrzeni, granicy ciągu i funkcji, jej ciągłości i różniczkowalności.

Przykładowe badania i wyniki badań w zakresie dydaktyki matematyki.

#### Praktyczne:

Zastosowanie poznanej teorii dydaktycznej w praktyce szkolnej. Pisemne projektowanie rozwiązań merytoryczno-dydaktycznych (scenariuszy i konspektów) w szkołach ponadgimnazjalnych na poziomach podstawowym i rozszerzonym nauczania matematyki.

Przygotowanie, prowadzenie i analizowanie lekcji matematyki.

Modyfikowanie własnych działań dydaktycznych w zależności od osiągniętych wyników. Właściwe opracowanie i selekcja materiału nauczania: dobór celów nauczania matematyki do określonej jednostki lekcyjnej, dobór metod nauczania z uwzględnieniem metod aktywizujących oraz dobór zadań do przyjętych wcześniej celów nauczania.

### LITERATURA PODSTAWOWA

1. H. Siwek, *Dydaktyka matematyki: teoria i zastosowania*, WSiP Warszawa 2005.
2. S. Turnau, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN Warszawa 1990.
3. G. Polya, *Jak to rozwiązać?*, PWN Warszawa 1993.
4. Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki tomy 2, 3*, WSiP Warszawa 1977.
5. Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki tom 1*, WSiP Warszawa 1977.
6. W. Nowak, *Konwersatorium z dydaktyki matematyki*, PWN, Warszawa 1989.

### LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

1. Z. Krygowska, M. Ciosek, S. Turnau, *Strategie rozwiązywania zadań matematycznych jako problem dydaktyki matematyki*, WSP. Rocznik Nauk.-Dydakt. 54, Kraków 1974.
2. (pod red. J. Żabowskiego), *Prace prof. dr Anny Zofii Krygowskiej. Materiały do studiowania matematyki, tom I*, Wydawnictwo Naukowe Novum, Płock 2000.
3. (pod red. J. Żabowskiego), *Prace prof. dr hab. Bogdana J. Noweckiego. Materiały do studiowania matematyki, tom II*, Wydawnictwo Naukowe Novum, Płock 2001.
4. (pod red. J. Żabowskiego), *Prace dr Macieja Klakli. Materiały do studiowania matematyki, tom III*, Wydawnictwo Naukowe Novum, Płock 2002.
5. (pod red. J. Żabowskiego), *Prace prof. dr hab. Jana Koniora. Materiały do studiowania matematyki, tom IV*, Wydawnictwo Naukowe Novum, Płock 2002.
6. G. Polya, *Odkrycie matematyczne*, WN-T, Warszawa 1975.
7. A. Pardała, *Wyobrażenia przestrzenne uczniów w warunkach nauczania szkolnej matematyki. Teoria problemy, propozycje*, „Fosze”, Rzeszów 1995.
8. M. Ciosek, *Rozwiązywanie zadań matematycznych na różnych poziomach matematycznego doświadczenia*, WN AP, Kraków, 2005.
9. S. Vinner, *The pseudo-conceptual and the pseudo-analytical thought process in the mathematics learning*, Educational Studies in Mathematics 1997 vol.34.

Wybrane artykuły z czasopism dla nauczycieli:

1. *Matematyka, Czasopismo dla nauczycieli*, WSiP, Wrocław.
2. *Nauczyciele i Matematyka [NiM]*, Stowarzyszenie Nauczycieli Matematyki, Bielsko-Biała.
3. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V. Dydaktyka Matematyki*, Kraków.
4. *Studia Matematyczne Akademii Świętokrzyskiej*, Wydawnictwo Akademii Świętokrzyskiej, Kielce.
5. *Wiadomości Matematyczne*, Rocznik Polskiego Towarzystwa Matematycznego, seria II, PWN Warszawa.

Podręczniki szkolne, przewodniki dla nauczycieli i materiały dydaktyczne. Materiały przygotowujące do matury.

### 3.4 Pracownia dydaktyki matematyki

#### Rok I

#### TREŚCI NAUCZANIA

Wymagania maturalne odnośnie poziomu podstawowego i rozszerzonego nauczania matematyki.

Dobór metod pracy na lekcji pod kątem wymagań maturalnych i możliwości poznawczych uczniów. Organizacja procesu nauczania i uczenia się z wykorzystaniem technologii informacyjnych i komunikacyjnych oraz środków multimedialnych stosowanych w nauczaniu matematyki.

Dydaktyczne wykorzystanie na różnych poziomach nauczania wiedzy związanej z własnościami funkcji elementarnych, ciągłością, granicami, a także równaniami i nierównościami i indukcją zupełną.

Diagnozowanie możliwości uczniów.

Analiza podstawy programowej, różnych serii podręczników i programów.

#### LITERATURA PODSTAWOWA

1. H. Siwek, *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowania w matematyce szkolnej*, WSiP, Warszawa 2005.
2. S. Turnau, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN, Warszawa 1990.
3. G. Polya, *Jak to rozwiązać?*, PWN, Warszawa 1993.
4. Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki cz. 1, 2, 3*, WSiP, Warszawa 1977.
5. W. Nowak, *Konwersatorium z dydaktyki matematyki*, PWN, Warszawa 1989.

#### LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

1. Z. Krygowska, M. Ciosek, S. Turnau, *Strategie rozwiązywania zadań matematycznych jako problem dydaktyki matematyki*, WSP Rocznik Nauk.-Dydakt. 54, Kraków 1974.
2. (pod red. J. Żabowskiego), *Prace prof. dr Anny Zofii Krygowskiej. Materiały do studiowania dydaktyki matematyki, tom I*, Wydawnictwo Naukowe Novum, Płock 2003.
3. (pod red. J. Żabowskiego), *Prace prof. dr hab. Bogdana J. Noweckiego. Materiały do studiowania dydaktyki matematyki, tom II*, Wydawnictwo Naukowe Novum, Płock 2002.
4. (pod red. J. Żabowskiego), *Prace dr Macieja Klakli. Materiały do studiowania dydaktyki matematyki, tom III*, Wydawnictwo Naukowe Novum, Płock 2002.
5. (pod red. J. Żabowskiego), *Prace prof. dr hab. Jana Koniora. Materiały do studiowania dydaktyki matematyki, tom IV*, Wydawnictwo Naukowe Novum, Płock 2002.
6. G. Polya, *Odkrycie matematyczne*, WN-T, Warszawa 1975.

Wybrane artykuły z czasopism dla nauczycieli:

1. *Matematyka, Czasopismo dla nauczycieli*, WSiP, Wrocław.
2. *Nauczyciele i Matematyka [NiM]*, Stowarzyszenie Nauczycieli Matematyki, Bielsko-Biała.



3. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki*, Kraków.
4. *Studia Matematyczne Akademii Świętokrzyskiej*, Wydawnictwo Akademii Świętokrzyskiej, Kielce.
5. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Wiadomości Matematyczne, Seria II*, PWN, Warszawa.

Podręczniki szkolne, przewodniki dla nauczycieli i materiały dydaktyczne. Materiały przygotowujące do matury (zbiory zadań, podręczniki).

### 3.5 Podstawy teoretyczne matematyki szkolnej

#### **Rok I** **TREŚCI NAUCZANIA**

Prowadzący zajęcia ma możliwość wyboru realizacji tematów z poniższego zestawu. Należy dobrać tematy z różnych działów matematyki.

1. Wybrane zagadnienia z teorii liczb w nauczaniu szkolnym.
2. Struktury algebraiczne i porządkowe w matematyce szkolnej.
3. Algebraiczna teoria podzielności i teoria krat źródłem dydaktycznych inspiracji w nauczaniu matematyki.
4. Ułamki algebraiczne i funkcje wymierne.
5. Wielomiany symetryczne w zadaniach konkursowych i olimpijskich.
6. Przekształcenia geometryczne wykresów funkcji.
7. Równania funkcyjne w definiowaniu pojęć matematyki szkolnej.
8. Zagadnienia optymalizacyjne bez zastosowania rachunku różniczkowego.
9. Zagadnienia miarowe. Równoważność wielokątów i wielościanów przez podział (twierdzenie Bolyaia-Gerwiena).
10. Konstruowanie przeliczalnych przestrzeni probabilistycznych jako modeli pewnych doświadczeń losowych o losowej liczbie etapów. Prawdopodobieństwo zdarzenia w takiej przestrzeni jako suma wszystkich nieskończenie wielu wyrazów pewnego ciągu geometrycznego.
11. Czas trwania doświadczenia losowego o losowej liczbie etapów jako zmienna losowa przeliczalnym rozkładzie. Określanie tego rozkładu a pojęcia i twierdzenia teorii ciągów. Wartość oczekiwana a suma szeregu liczbowego (osobliwe elementarne sposoby znajdowania takich sum).
12. Graf stochastyczny z cyklami i pętlami jako plansza do pewnej gry losowej a obliczanie prawdopodobieństwa zdarzenia za pomocą rozwiązywania układu prostych równań liniowych.
13. Twierdzenie Desargues'a i twierdzenie Pappusa geometrii rzutowej, ich postaci afiniczne, zastosowanie do dowodu pewnych twierdzeń geometrii elementarnej ( m.in. twierdzenie o środkowych boków trójkąta) oraz do konstrukcji geometrycznych samą linijką.
14. Relacja rozdzielania harmonicznego w geometrii rzutowej, interpretacja afiniczna tej relacji, zastosowanie do dowodu pewnych twierdzeń geometrii elementarnej ( m. in. twierdzenie o prostej przechodzącej przez środki dwóch boków trójkąta) oraz konstrukcji geometrycznych samą linijką. Symetria osiowa i symetria środkowa w ujęciu rzutowym.
15. Interpretacja Poincare'go geometrii euklidesowej i pewne twierdzenia geometrii Euklidesa w tej interpretacji ( np. twierdzenie Ptolemeusza, twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów, twierdzenie Pitagorasa).
16. Idee głębokie, formy powierzchniowe i modele formalne podstawowych pojęć w matematyce szkolnej.

#### **LITERATURA PODSTAWOWA**

1. M. Aigner, G. M. Ziegler, *Dowody z Księgi*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002.
2. K. Borsuk, W. Szmielew, *Podstawy geometrii*, PWN, Warszawa 1972.
3. M. Bryński, *Olimpiady matematyczne*, Warszawa 1995.

4. A. Chronowski, J. Major, Z. Powązka, *O różnych sposobach definiowania wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej*, Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia II (2009), 29 – 36.
5. A. Chronowski, *Podstawy arytmetyki szkolnej*, cz. 1 i 2, Wydawnictwo KLEKS, Bielsko-Biała 1999.
6. A. Chronowski, *Przekształcenia wykresów funkcji*, Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis 36, Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia I (2006), 13 – 30.
7. A. Chronowski, *Teoretyczne i dydaktyczne aspekty nauczania o największym wspólnym dzielniku i najmniejszej wspólnej wielokrotności w zbiorze liczb naturalnych*, Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis 36, Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia I (2006), 31– 56.
8. A. Chronowski, *Ułamki algebraiczne i funkcje wymierne*, Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia II (2009), 5 – 27.
9. A. Chronowski, Z. Powązka, *O pewnym równaniu funkcyjnym charakteryzującym całkę*, Matematyka w szkole dnes a zajtra, 8. rocznik, 10 – 12.9.2007, Ružomberok, (2007).
10. H. S. M. Coxeter, *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*, PWN, Warszawa 1967.
11. R. Courant, H. Robbins, *Co to jest Matematyka*, Warszawa 1998.
12. J. Czaplińska, *Od tangramu do twierdzenia Bolyaia-Gerwiena*, Nauczyciele i Matematyka (49), 2004.
13. S. Fudali, *Geometria*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 1989.
14. B. Gleichgewicht, *Algebra*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2004.
15. R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, WN PWN, Warszawa 2002.
16. R. Hajłasz, *Proste zadania na maksima i minima*, WSiP, Warszawa 1990.
17. J. Kołodziejczyk, *Równania funkcyjne i przykłady ich wykorzystywania*, Matematyka 4(1987), 209 – 214.
18. M. Kordos, *O różnych geometriach*, Wydawnictwo ALFA, Warszawa 1987.
19. W. Kostin, *Podstawy geometrii*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Bydgoszcz 1951.
20. M. Kuczma, *O polu prostokąta, czyli charakterystyczne własności różnych funkcji*, Delta 1(37) 1977, 2 – 6.
21. J. Major, Z. Powązka, *Uwagi dotyczące wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej*, Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis 36, Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia I, (2006), 163 –186.
22. E. Marchow, *Geometria rzutowa*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2002.
23. W. Marzantowicz, P. Zarzycki, *Elementarna teoria liczb*, WN PWN, Warszawa 2006.
24. H. Pawłowski, *Zadania z olimpiad matematycznych z całego świata*, Oficyna Wydawnicza „Tutor”, Toruń 1997.
25. J. Perelman, *Matematyka na wesoło*, Nasza Księgarnia, Warszawa 1957.
26. A. Płocki, *Prawdopodobieństwo wokół nas. Rachunek prawdopodobieństwa w zadaniach i problemach*, Wydawnictwo DLA SZKOŁY, Wilkowie 2004.
27. A. Płocki, *Stochastyka dla nauczyciela. Rachunek prawdopodobieństwa, kombinatoryka i statystyka matematyczna jako matematyka „in statu nascendi”*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock 2007.
28. M. Szurek, *Opowieści matematyczne*, WSiP, Warszawa 1987.
29. S.Y. Yan, *Teoria liczb w informatyce*, WN PWN, Warszawa 2006

#### LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

1. W. Narkiewicz, *Teoria liczb*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2003.
2. A. Płocki, *Dydaktyka stochastyki*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock 2005.
3. W. Sierpiński, *Teoria liczb*, I, II, Warszawa 1950, 1959.
4. *Szkola geometrii. Odczyty kaliskie*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1993.

### 3.6 Proseminarium z metod rozwiązywania zadań matematycznych

#### Rok II TREŚCI NAUCZANIA

1. Strategie nauczania a rodzaje zadań matematycznych.
2. Przedłużanie i uogólnianie zadań.
3. Gry i zabawy matematyczne (origami, tangramy).
4. Zadania konkursowe i olimpijskie.
5. Zadania z czasopism matematycznych.

6. Zadania z Internetu.
7. Zadania na zastosowania matematyki.
8. Redakcja zadań i ich rozwiązań.
9. Analiza zadań z egzaminu gimnazjalnego.
10. Analiza zadań z „nowej matury”.
11. Zastosowanie nowoczesnych środków dydaktycznych (kalkulator graficzny, komputer) w procesie rozwiązywania zadań matematycznych.
12. Recenzje podręczników do matematyki pod względem zadaniowym.

#### LITERATURA PODSTAWOWA

1. P. Giblin, I. Porteous, *Matematyczne wyzwania*, WSiP, 1995.
2. J. Górowski, A. Łomnicki, *Czwarty stopień wtajemniczenia*, Wydawnictwo KLEKS, Bielsko-Biała 1998.
3. Książeczki z serii „Miniatury matematyczne”, Wydawnictwo AKSJOMAT, Toruń.
4. W. Liszka, Z. Powązka, *Sztuka rozwiązywania zadań maturalnych i egzaminacyjnych z matematyki*, Wydawnictwo IDEA, Kraków 2004.
5. H. Pawłowski, *Na olimpijskim szlaku*, Oficyna Wydawnicza „Tutor”, Toruń 1999.
6. Z. Powązka, *Trzeci stopień wtajemniczenia. Część I, W krainie liczb*, Wydawnictwo KLEKS, Bielsko-Biała 1999.
7. M. Powązka, Z. Powązka, D. Długosz, G. Stanecka, *Trzeci stopień wtajemniczenia. Część II, Geometryczne przygody*, Wydawnictwo KLEKS, Bielsko-Biała 2001.

#### LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

1. W. Bednarek, *Szkice o liczbach, funkcjach i figurach*, Oficyna Wydawnicza „Tutor”, Toruń 2003.
2. L. Kourliandtchik, *Etiudy matematyczne*, Oficyna Wydawnicza „Tutor”, Toruń 2000.
3. L. Kourliandtchik, *Impresja liczbowe*, Oficyna Wydawnicza „Tutor”, Toruń 2001

### 3.7 Zagadnienia fizyki w matematyce szkolnej

#### Rok II TREŚCI NAUCZANIA

1. Kinematyka punktu materialnego. Wektor położenia, prędkość, przyspieszenie. Równania ruchu – w szczególności jednostajnego i jednostajnie przyspieszonego. Wykresy zależności prędkości i drogi od czasu. Prędkość chwilowa, prędkość średnia. Składanie prędkości – zadania o statkach na rzece itp. Zagadnienie pościgu. Ruch po okręgu, przyspieszenie dośrodkowe, prędkość kątowna. Toczenie okręgu po prostej, toczenie okręgu po okręgu.
2. Zmiana układu odniesienia, transformacja Galileusza. Układy inercjalne i nieinercjalne, siły bezwładności. Informacja o szczególnej teorii względności – transformacja Lorentza, względność jednoczesności, skrócenie długości, paradoks bliźniąt, zależność masy ciała od prędkości, związek między masą i energią.
3. Dynamika punktu materialnego i układu punktów materialnych. Prawa dynamiki Newtona. Pęd, zasada zachowania pędu. Energia kinetyczna, energia potencjalna, praca. Zasada zachowania energii. Zderzenia sprężyste kul. Prawo odbicia dla kuli bilardowej. Elementy statyki. Składanie i rozkładanie sił. Środek ciężkości układu punktów. Związek z geometrią – środek ciężkości trójkąta. Moment siły i moment bezwładności. Dźwignia jednostronna i dwustronna. Przykład zastosowania praw statyki do rozwiązania problemu geometrycznego – wybór miejsca na budowę szkoły dla trzech wsi o zadanej liczbie mieszkańców, w szczególności znajdowanie punktu Fermata w trójkącie.
4. Prawo grawitacji. Ruch w polu grawitacyjnym, prawa Keplera, satelita geostacjonarny. Ruch w jednorodnym polu grawitacyjnym – spadek swobodny, rzut pionowy, rzut poziomy i rzut ukośny, równanie toru w rzucie poziomym i ukośnym. Równia pochyła.
5. Elementy hydrostatyki. Prawo Archimedesasa.
6. Optyka geometryczna. Zasada Fermata najkrótszego czasu. Prawo odbicia i załamania światła. Wykorzystanie zasady odbicia w zadaniach z geometrii – znajdowanie najkrótszej drogi

spełniającej zadane warunki. Zwierciadło płaskie, zwierciadło paraboliczne, peryskop, światła odbłaskowe. Soczewki.

7. Obwody prądu stałego. Prawo Ohma. Prawa Kirchhoffa. Opór zastępczy dla układu oporów. Praca i moc prądu elektrycznego. Prawo Joule'a – Lenza.